Джордан Элленберг

Как не ошибаться. Сила математического мышления

JORDAN ELLENBERG

HOW NOT TO BE WRONG:

THE POWER OF MATHEMATICAL THINKING

Библиотека фонда «Эволюция»

Научный редактор Михаил Гельфанд

Издано с разрешения Jordan Ellenberg c/o William Morris Endeavor Entertainment, LLC и литературного агентства Andrew Nurnberg

Книга рекомендована к изданию Нелли Камаевой и Константином Дудкиным

Все права защищены.

Никакая часть настоящего издания ни в каких целях не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, если на это нет письменного разрешения издателя.

© Jordan Ellenberg, 2014

© Перевод на русский язык, издание на русском языке, оформление. ООО «Манн, Иванов и Фербер», 2017 * * *

О фонде «Эволюция»

Просветительский фонд «Эволюция» основан в 2015 году сообществом российских просветителей. Цель фонда – популяризация научного мировоззрения, продвижение здравомыслия и гуманистических ценностей, развитие науки и образования.

Одно из направлений работы фонда – поддержка издания научно-популярных книг. Каждая книга, выпущенная при содействии фонда «Эволюция», тщательно отбирается серьезными учеными. Критерии отбора – научность содержания, увлекательность формы и значимость для общества. Фонд сопровождает весь процесс создания книги – от выбора до выхода из печати. Поэтому каждое издание библиотеки фонда – праздник для любителей научно-популярной литературы.

Больше о работе просветительского фонда «Эволюция» можно узнать по адресу www.evolutionfund.ru

Предисловие научного редактора

Из-за неосторожного движения развалилась стопка книг и журналов. Наверху образовавшейся кучи случайно оказалась книга Элленберга, и рабочий день оказался безнадежно испорчен, как и множество дней до того, потому что, раскрыв эту книгу на произвольном месте, невозможно оторваться, даже если ты внимательно прочитал ее уже три раза: когда решал, принять ли к переводу и изданию; когда делал примечания научного редактора; когда правил верстку (и, да, делал дополнительные примечания научного редактора). И еще потому, что это очень хорошая, правильная и нужная книга. Ее можно читать как хорошую беллетристику (как заметил сам автор, история о том, как студенты МТИ систематически выигрывали в лотерее штата Массачусетс, достойна экранизации), а можно внимательно следить за всеми выкладками. Да, в книге есть формулы, и это не страшно!

Во всех школьных кабинетах математики висят плакаты со словами Михаила Васильевича Ломоносова: «Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит». Книга Джордана Элленберга делает именно это – приводит ум в порядок. В предисловии автор обещает, что будет рассматривать простые, но при этом глубокие проблемы, и блистательно выполняет свое обещание.

Практически на пальцах, используя простые рисунки, автор не только объясняет важные математические понятия, но тут же показывает, почему и как их необходимо использовать в повседневных рассуждениях об экономике, социальных отношениях и других сторонах жизни общества. Он наглядно демонстрирует опасности бездумной статистики, экстраполяции за пределы допустимого, упрощенного линейного мышления, заодно разъясняя множество идей из математического анализа, теории вероятностей, статистики и теории кодирования.

Вот простой пример. Всем ясно, что игрок в баскетбол хорошо пробивает штрафные, если доля попаданий у него велика. Давайте возьмем результаты какого-нибудь чемпионата, ранжируем баскетболистов по этой доле, и – лидером списка станет никому не известный игрок, однажды вышедший на замену и удачно совершивший свою единственную попытку: 1 из 1 – это 100 %, больше не бывает (кстати, ранжировать по сумме тоже не стоит: тогда, наоборот, преимущество получат те, кто сделал много бросков, даже если в среднем они были не очень удачны). Если кому-то этот пример кажется не слишком важным, заменим игроков на школы, а удачные броски на выпускников, поступивших в хорошие университеты.

Автор приводит примеры из газетных статей, в которых неаккуратное использование математических понятий, даже самых простых, таких как проценты, приводит людей к дурацким выводам, и наглядно показывает, как этого следовало избежать. Особенно подробно он обсуждает такие тонкие проблемы, как множественное тестирование (необходимость учитывать количество сделанных попыток при оценке значимости желаемого результата), избирательные отчеты (результаты удавшихся опытов, например клинических испытаний, публикуются, а неудавшихся – нет, что искажает общую картину) и различные парадоксы, связанные с голосованием.

Нам, переводчику и двум редакторам, литературному и научному, было одновременно легко и сложно работать над переводом. Книга хорошо написана, и мы очень старались не испортить этого впечатления при переводе. Сложность была в том, что мы хотели, чтобы русскоязычный читатель воспринимал текст так же, как англоязычный – и не просто свободно читающий на английском языке, но сходу понимающий отсылки к очевидным для жителей США реалиям. Этого почти невозможно было добиться; верно и то, что любой перевод – это трудный компромисс между содержательностью, верностью оригиналу и сохранением авторского стиля. Здесь мы пошли по очевидному пути многочисленных комментариев; на это было проще решиться, потому что автор и сам был не прочь прокомментировать собственный текст. В единичных случаях, когда это позволяло сохранить стиль без ущерба для содержания, мы подставляли российские реалии на место американских – все такие случаи помечены в подстрочных примечаниях. В ряде мест мы решились также добавить дополнительные заметки, надеемся, это не нарушило стиль автора.

Повторю: это очень важная и нужная книга. Прочитав ее, человек приобретает не только привычку к логическому мышлению, но иммунитет к внешне внушительной демагогии, основанной на жонглировании числами. По словам Роджера Бэкона, «человек, не знающий математики, не способен ни к каким другим наукам. Более того, он даже не способен оценить уровень своего невежества, а потому не ищет от него лекарства». Последнее особенно важно, и книга Джордана Элленберга – замечательный образец лекарства, которое так нам необходимо.

Михаил Гельфанд,

доктор биологических наук, профессор,

член Academia Europaea

Посвящается Тане

Самое лучшее в математике не просто заслуживает изучения в качестве одной из задач, а должно стать неотъемлемой частью повседневного мышления, к которой разум обращается всякий раз со все большим воодушевлением. Бертран Рассел«Изучение математики», 1902 год[1]

Пролог

А мне это пригодится?

Сейчас, в эту самую минуту, где-то в мире какая-нибудь студентка препирается со своим преподавателем математики, вручившим ей список из тридцати определенных интегралов, на вычисление которых уйдет немалая часть ее драгоценных выходных.

На свете так много всего, чем она хотела бы заниматься. В принципе нет такого дела, за которое она не была бы готова взяться – практически за любое , но только не за решение интегралов. Это абсолютно точно, поскольку на прошлой неделе ей уже пришлось в свои выходные потратить уйму времени на

почти такие же тридцать определенных интегралов. В подобном времяпровождении она не видит никакого смысла, о чем заявляет вслух. В их непростой беседе наступает тот самый момент, когда наша студентка собирается задать вопрос, которого любой преподаватель боится больше всего:

И когда же мне это пригодится?

По всей вероятности, учитель математики ответит так: «Понимаю, сейчас это занятие кажется вам бессмысленным. Но имейте в виду следующее: вы еще не знаете, чем будете заниматься завтра; сегодня вы не находите никакой связи между интегралами и своим будущим, но вы можете выбрать такую профессию, в которой будет чрезвычайно важно уметь быстро и правильно вычислять определенные интегралы вручную».

Вряд ли подобный ответ удовлетворит студентку, поскольку он лживый. Что понимают и преподаватель и ученик. Количество взрослых людей, которым когда-либо пригодится интеграл (1 – 3

x + 4

x 2)–2 d

x, или формула косинуса 3?, или синтетическое деление многочленов, можно сосчитать на нескольких тысячах рук.

Эта ложь не доставляет особого удовольствия и учителю. Мне ли не знать: за многие годы преподавания математики я давал сотням студентов задание вычислять целые списки определенных интегралов.

К счастью, есть и более подходящее объяснение. Я постараюсь его для вас сформулировать.

«Математика – не просто последовательность вычислений, которые необходимо выполнять механически до тех пор, пока у вас не закончится терпение и выдержка – хотя эта мысль может показаться весьма далекой от того, чему вас учили на курсах, именуемых “математика”. В математике интегралы играют ту же роль, что силовые тренировки и физическая подготовка в футболе. Если вы хотите научиться играть в футбол – а я имею в виду

играть по-настоящему , – вам предстоит выполнить множество скучных, однообразных, на первый взгляд бессмысленных упражнений. Используют ли когда-либо эти упражнения профессиональные игроки? На поле никто не поднимает штангу и не бегает зигзагами между конусами. Но все-таки футболисты используют ту силу, скорость, понимание сути игры и гибкость, которую они обрели в процессе выполнения – неделя за неделей – множества утомительных упражнений. Отработка таких упражнений – неотъемлемая часть обучения игре в футбол.

Если вы хотите зарабатывать игрой в футбол на жизнь или даже стать членом университетской команды, вам предстоит провести много скучных выходных на тренировочном поле. Другого пути нет. Но есть и хорошая новость: если интенсивные тренировки вам не под силу, вы все равно сможете играть в футбол – для развлечения, для самого себя. Сделав пас защитнику или забив гол с большого расстояния, вы будете получать такое же удовольствие, как и профессиональный спортсмен. Кроме того, играя в футбол с друзьями, вы почувствуете себя намного здоровее и счастливее, чем если просто сидели бы и смотрели по телевизору игру профессионалов.

Математика представляет собой почти то же самое. Возможно, вы не станете обременять себя профессией, непосредственно связанной с этой наукой. Что вполне нормально, поскольку большинство людей не ставят перед собой такой цели. Тем не менее вы все-таки можете заниматься математикой. По всей вероятности, вы – сами того не зная – уже решаете математические задачи[2]. Математика вплетена в ткань нашего мышления. Кроме того, математика помогает человеку лучше делать свое дело. Знание математики – своего рода рентгеновские очки, позволяющие увидеть структуру мира, скрытую под беспорядочной, хаотичной поверхностью. Математика – это наука о том, как не совершать ошибок, а математические формы и методы выковывались на протяжении многих столетий упорного труда и дискуссий. Владение математическим инструментарием позволит вам составить более глубокое, достоверное и осмысленное представление об окружающем мире. Все, что вам нужно, – это тренер или по крайней мере книга, которая научит вас правилам игры и некоторым базовым тактическим приемам. Я буду вашим тренером. Я научу вас этому».

К сожалению, на занятиях из-за нехватки времени мне не часто приходится произносить подобные речи. Напротив, в книге всегда найдется место и для более пространных рассуждений. Надеюсь, мне удастся оправдать сделанные выше серьезные заявления, показав вам, что математика позволяет решать многие из задач – будь то политика, медицина, коммерция или богословие, – над которыми мы размышляем каждый день.

Однако даже если я и произнес бы свою вдохновляющую речь перед студенткой, у нее – если она действительно проницательна – все равно останутся сомнения.

«Профессор, – сказала бы она, – все это звучит неплохо, но несколько абстрактно. Вы говорите, будто математические знания позволяют нам делать правильные шаги там, где в противном случае msы обязательно оступились бы. Но что именно вы имеете в виду? Дайте

конкретный пример ».

И тогда я рассказал бы студентке историю Абрахама Вальда, а также вспомнил бы о его решении проблемы отсутствующих пулевых отверстий.

Рассказ об Абрахаме Вальде и отсутствующих пробоинах

Подобно многим историям времен Второй мировой войны, мой рассказ начинается с того, как нацисты изгнали евреев из Европы, и заканчивается тем, что они горько об этом пожалели. Абрахам Вальд родился в 1902 году в городе, который тогда назывался Клаузенбург и принадлежал Австро-Венгерской империи{1}. К тому времени, когда Вальд достиг подросткового возраста, Первая мировая война уже вошла в учебники, а его родной город стал румынским городом Клуж. Внук раввина и сын булочника, Вальд проявлял математические способности с самых ранних лет. Одаренность мальчика не осталась без внимания, и он получил возможность изучать математику в Венском университете, где увлекся предметами настолько абстрактными, что даже по меркам чистой математики они были слишком трудны для понимания: теорией множеств и метрическими пространствами.

Вальд закончил обучение в середине 30-х годов XX столетия, когда Австрия уже находилась в состоянии глубокого экономического спада. Как у иностранца у Вальда не было шансов получить в Вене должность профессора, но его спасло предложение, поступившее от Оскара Моргенштерна. Впоследствии Моргенштерн иммигрирует в Соединенные Штаты Америки и будет участвовать в создании теории игр, а в 1933 году он, будучи директором Австрийского института экономических исследований, нанял Вальда для выполнения элементарных математических задач. Согласие на эту работу – хотя ему и назначили совсем небольшую оплату – оказалось весьма умным решением. В дальнейшем благодаря полученному опыту в области экономики Вальд получил предложение войти в комиссию Коулза – экономической организации, которая в то время находилась в Колорадо-Спрингс. Несмотря на ухудшающуюся политическую ситуацию, Вальд не хотел делать шаг, который навсегда разлучил бы его с чистой математикой. Но затем нацисты захватили Австрию, что помогло Вальду сделать окончательный выбор. После нескольких месяцев работы в Колорадо он получил предложение занять профессорскую должность в Колумбийском университете. Вальд снова упаковал вещи и переехал в Нью-Йорк.

Именно там Абрахам Вальд встретил войну.

Группа статистических исследований (Statistical Research Group; далее по тексту – SRG){2}, в которой Вальд работал на протяжении большей части Второй мировой войны, выполняла секретную программу; ее цель состояла в том, чтобы собрать крупнейших американских специалистов по статистике и использовать их возможности для решения военных задач. Это напоминало Манхэттенский проект, только в качестве оружия, разработкой которого занималась SRG, выступали уравнения, а не взрывчатые вещества. Кроме того, SRG располагалась действительно на Манхэттене, в районе Морнингсайд-Хайтс, в доме 401 на Западной 118-й улице – всего в одном квартале от Колумбийского университета. Сейчас в этом доме находятся квартиры профессоров Колумбийского университета и несколько кабинетов врачей, но в 1943 году это был живой и блестящий мозговой центр военной математики. В одном из помещений располагалась Группа прикладной математики Колумбийского университета; десятки молодых женщин корпели над калькуляторами Marchant, рассчитывая формулы для оптимальной траектории движения истребителя, позволявшей ему постоянно держать вражеский самолет на прицеле. В другом помещении команда исследователей Принстонского университета разрабатывала схемы стратегических бомбардировок. А по соседству группа ученых Колумбийского университета работала над созданием атомной бомбы.

Однако SRG была самой сильной и, по большому счету, самой влиятельной из всех этих групп. В SRG царила атмосфера интеллектуальной открытости и интенсивной научной мысли – все работали с ощущением общей цели, которое возникает только при решении задач особой важности. «Когда мы давали рекомендации, – писал руководитель SRG Уилсон Аллен Уоллис, – их использовали. Пулеметы истребителей, вступавших в бой, были снаряжены согласно рекомендациям Джека Вулфовица[3] по поводу того, как смешивать боеприпасы разных типов, – и летчики либо возвращались, либо нет. Топливо ракет, которые запускали самолеты военно-морских сил, проходило проверку в соответствии со схемой выборочного контроля Эйба Гиршика – и эти ракеты либо взрывались и уничтожали наши собственные самолеты и наших летчиков, либо поражали цель»{3}.

Математический талант членов группы соответствовал важности задачи. По словам Уоллиса, «как с точки зрения количества, так и с точки зрения качества SRG была самой выдающейся группой специалистов по статистике из всех когда-либо созданных»{4}. В группе работали: Фредерик Мостеллер – впоследствии основатель факультета статистики Гарвардского университета; Леонард Джимми Сэвидж[4] – первопроходец теории принятия решений и большой приверженец области математики, позже ставшей известной как байесовская статистика. В SRG время от времени заглядывал Норберт Винер – математик Массачусетского технологического института, создатель кибернетики. Это был коллектив ученых, в котором почетное четвертое место среди самых толковых занимал Милтон Фридман – будущий лауреат Нобелевской премии по экономике.

А

первое место по праву закрепилось за Абрахамом Вальдом. Вальд – преподаватель Аллена Уоллиса в Колумбийском университете – стал для всей группы своего рода высочайшим математическим авторитетом. Впрочем, как «подданный враждебного государства» с юридической точки зрения Вальд не имел права видеть секретные отчеты – те отчеты, которые он собственноручно составлял. В SRG шутили, что секретари обязаны буквально вырывать из-под его пера каждый листок бумаги тут же, как только он его допишет{5}. При этом Вальд практически не вписывался в общую направленность группы: он был очень далек от решения прикладных задач, поскольку его всегда интересовала лишь абстрактная математика. Однако в данном случае верх взяла его личная заинтересованность: посвятить свой талант антифашистской борьбе. Так или иначе, но Вальда сочли именно тем человеком, которого лучше было иметь на своей стороне – тем более, когда возникала необходимость перевести расплывчатые мысли на язык точных математических формулировок.* * *

Задача заключалась в следующем. Вы не хотите, чтобы вражеские истребители сбивали ваши самолеты, поэтому покрываете их броней. Но броня делает самолет более тяжелым, что снижает его маневренность и увеличивает расход топлива. Если на самолете слишком много брони – это проблема; если брони слишком мало – это тоже проблема. Где-то в интервале лежит оптимальное решение. Чтобы вычислить этот идеальный вариант, вы собираете под крышей нью-йоркской квартиры команду лучших математиков{6}.

Военные представили на рассмотрение SRG данные, которые, по их мнению, могли бы помочь в решении задачи. Когда американские самолеты выходили из воздушных боев над Европой, они были покрыты дырами от пуль. Однако повреждения распределялись по корпусу самолета не равномерно. Пробоин на фюзеляже было больше, чем на двигателе.

Представители командования увидели возможность повысить эффективность использования самолетов, обеспечив такой же уровень защиты в его уязвимых местах, для этого требовалось правильно распределить количество брони, делая ее слой толще там, где самолет получает больше всего пробоин. Но сколько именно брони следует устанавливать на этих частях самолета? С просьбой найти нужное решение военные обратились к Вальду. И получили совсем неожиданный ответ.

Броню следует укреплять не там, сказал Вальд, где больше всего пробоин, а там,

где их нет , то есть на двигателе.

Вальд задался вопросом: где находятся недостающие пробоины? Именно в этом проявилась его проницательность – в простоте поставленной задачи. Речь шла о тех самых отверстиях от поражающих средств – пробоинах, которые покрывали бы кожух двигателя, если повреждения были бы распределены равномерно по всему самолету. В ответе на свой вопрос Вальд не сомневался ни на йоту. Причина, почему на двигателях уцелевших самолетах было меньше повреждений, только одна: в случае прямого попадания в двигатель самолет просто не возвращался из боя. Однако многие самолеты прилетали на базу с фюзеляжем, похожим на швейцарский сыр, – убедительный довод в пользу того, что корпус можно (а значит, и нужно) оставить без дополнительной брони. В военном госпитале вы встретите гораздо больше раненных не в грудь, а в ноги. Но причина не в том, что люди не получают ранений в грудь – просто после таких ранений они, как правило, не выживают.

Вот старый математический прием, который вносит полную ясность в картину происходящего:

присвоить некоторым переменным значение 0 . В данном случае в качестве такой переменной выступает вероятность того, что самолет, получивший прямое попадание в двигатель, может остаться в воздухе. Нулевое значение этой вероятности означает, что единственное попадание в двигатель неизбежно приводит к падению самолета. Как выглядели бы данные о возвращающихся самолетах в таком случае? У вас есть самолеты, вернувшиеся с дырами от пуль в крыльях, фюзеляже, носовой части, но нет ни одного самолета с пробоинами в двигателе. Военный аналитик может объяснить этот факт двумя причинами: либо немецкие орудия попадают во все части самолета, кроме одной, либо двигатель – это самое уязвимое место. Обе причины объясняют данные о повреждениях на уцелевших самолетах, но второе объяснение гораздо логичнее. Стало быть, броню следует укреплять там, где нет пулевых отверстий.

Выводы Вальда были сразу приняты к сведению, более того, ими руководствовались во время военных действий в Корее и во Вьетнаме{7}. Я не могу точно сказать, сколько американских самолетов спасли его рекомендации, хотя это наверняка известно тем преемникам SRG в современных вооруженных силах, которые занимаются сбором и обработкой данных. Высшие чины американских военных ведомств всегда отдавали себе отчет, что страны побеждают в войнах не потому, что они храбрее противника или более независимы или им чуть больше благоволит Бог. Как правило, победителем становится тот, у кого сбивают на 5 % меньше самолетов, или кто использует на 5 % меньше топлива, или кто обеспечивает пехоте на 5 % более качественное питание[5] при 95 % затрат. О таких вещах не принято говорить в военных фильмах, но именно к ним сводятся сами войны. И на каждом этапе этого пути присутствует математика. * * *

Почему Абрахам Вальд увидел то, чего не смогли увидеть офицеры, обладающие более профессиональными знаниями и пониманием сути воздушного боя? Причина в аналитическом складе ума Вальда – так называемом математическом мышлении. Математик всегда ставит такие вопросы: «Из каких предположений вы исходите? Обоснованы ли эти предположения?»[6] Порой это вызывает раздражение. Однако такой подход может быть весьма продуктивным. В случае с авиационной броней офицеры, сами того не замечая, исходили из предположения, что вернувшиеся самолеты представляют собой случайную выборку всех самолетов. Если действительно так и было бы, мы могли бы, проанализировав распределение пробоин только на уцелевших самолетах, сделать вывод об их распределении на всех машинах. Но, как только вы осознаете, что в своих расчетах опираетесь на

такое предположение, вам сразу станет понятно,

насколько оно ошибочно: нет никаких оснований ожидать равной вероятности выживания всех самолетов независимо от того, в какую часть машины попадает огнестрельное оружие. Мы вернемся к этой теме в главе пятнадцатой, где в более точных математических терминах выразим мысль о существовании

зависимости между уровнем выживаемости самолетов в бою и местоположением пробоин.

Еще одно неоспоримое достоинство Вальда – его особая склонность к абстракции. Вулфовиц, учившийся у Вальда в Колумбийском университете, писал, что ученый отдавал предпочтение задачам «самого абстрактного рода», а также что он «всегда охотно говорил о математике, но был безразличен к ее популяризации и практическому применению»{8}.

Особенности характера Вальда действительно мешали ему сосредоточиться на прикладных задачах. Ему было в тягость разбираться в деталях конструкции самолетов и оружия, поэтому он анализировал математические основы происходящего, связывая все в единое целое. Порой такой подход приводит к игнорированию действительно важных аспектов проблемы. Правда, он дает возможность увидеть общую схему, лежащую в основе различных задач, но на поверхности выглядит совсем по-другому. Это позволяет обрести весомый опыт даже в тех областях, в которых на первый взгляд у вас не может быть никаких практических знаний.

Глубинную структуру задачи с пробоинами в авиационной броне математики обозначают термином «систематическая ошибка выжившего». Такая погрешность часто возникает в самых разных ситуациях[7]. Зная о существовании систематической ошибки выжившего – как знал о ней Абрахам Вальд, – вы будете готовы к тому, чтобы обнаружить ее, где бы она ни скрывалась.

Возьмем в качестве примера взаимные фонды[8]. Оценка их эффективности – это именно та область, в которой вам хотелось бы не допустить ни малейшей ошибки. Изменение годового темпа роста стоимости активов фонда на 1 % может составить разницу между ценным инвестиционным активом и убыточным инвестиционным инструментом. На первый взгляд может показаться, что к первому типу инвестиционных активов относятся фонды категории Large Blend (смешанные фонды акций крупных компаний) по версии агентства Morningstar, показывающие примерно такой же рост, что и индекс S&P 500. За период с 1995 по 2004 год их рост составил 178,4 %, в среднем по целых 10,8 % в год[9]. Похоже, если в то время вы могли бы вложить деньги в те фонды, это принесло бы вам большую прибыль – не так ли?

Так вот, на самом деле все обстоит иначе. Компания Savant Capital в 2006 году провела исследование{9}, результаты которого не только проливают свет на эти данные, но и действуют несколько отрезвляюще. Предлагаю подумать, как формируются рейтинги Morningstar. Например, в 2004 году агентство проанализировало темпы роста всех фондов категории Large Blend за прошедшие десять лет.

Но здесь кое-чего не хватает, а именно:

фондов, не вошедших в эту категорию . Взаимные фонды не живут вечно. Некоторые из них процветают, тогда как другие прекращают свое существование. К последним, как правило, относятся фонды, не получающие прибыль. Следовательно, оценивать рост стоимости активов взаимных фондов за десятилетний период по данным о фондах, еще существовавших к концу этого периода, – все равно что оценивать эффективность маневров во время воздушного боя, пользуясь методом подсчета количества пробоин в вернувшихся самолетах. Но вдруг мы не обнаружим ни одного самолета, у которого было бы больше одной пробоины? О чем это говорило бы? Конечно, не об умении пилотов мастерски уклоняться от вражеского огня. Скорее всего, это означало бы, что самолеты, получившие два прямых попадания, охваченные огнем, упали на землю.

Результаты исследования компании Savant показывают: если наряду с выжившими фондами включить в расчеты эффективность фондов, прекративших свое существование, рентабельность инвестиций упала бы до 134,5 %, то есть до 8,9 % в год. Показатель гораздо более скромный, не правда ли? Этот вывод подтвердили результаты одного из последних исследований. Журнал Review of Finance провел в 2011 году комплексное исследование, охватившее около пяти тысяч фондов{10}. По его результатам было установлено, что избыточная доходность выживших фондов (всего 2641 фонд) оказалась на 20 % выше того же показателя, рассчитанного с учетом данных о фондах, потерпевших неудачу. Возможно, эффект систематической ошибки выжившего удивил инвесторов, но для Абрахама Вальда он, по всей вероятности, не стал бы неожиданностью.

Математика есть продолжение здравого смысла иными средствами

В этот момент мой юный собеседник прервет мой рассказ вполне обоснованным вопросом: ну и где здесь математика? Да, Вальд был математиком, и вне всяких сомнений, его решение проблемы надежности авиационной брони гениально. Но при чем здесь математика? Ни тригонометрических тождеств, ни интегралов, ни неравенств, ни формул.

Прежде всего следует отметить, что математические формулы все-таки были. Я опустил их, рассказывая историю Вальда, поскольку это только пролог. Во введении к книге о размножении человека, рассчитанной на десятилетних ребят, вряд ли стоит во всех подробностях рассказывать, как детки попадают в мамин живот. Нет, мы напишем что-нибудь в таком роде: «В природе все меняется. Зимой деревья сбрасывают листья, весной снова цветут; обычная гусеница прячется в свой кокон и выходит из него, превратившись в прекрасную бабочку. Ты тоже часть природы, поэтому…»

Мы с вами сейчас находимся именно в такой части книги.

Но мы взрослые люди, поэтому давайте на секунду уйдем от расплывчатых формулировок и посмотрим, как выглядит типичная страница реального отчета Вальда{11}.

…можно вычислить нижний предел

Qi . Мы предполагаем, что разность между значениями

qi и

qi +1 находится в определенных пределах. Следовательно, можно вычислить верхний и нижний пределы

Qi .

Предположим:

где ?1 < ?2 < 1, таковы, что выполнено:

Точное решение слишком громоздко, но можно рассчитать приближенные значения верхнего и нижнего пределов

Qi для

i <

n посредством следующей процедуры. В расчетах используется такой набор гипотетических данных:

Условие

A удовлетворено, поскольку подстановка дает нам значение что меньше, чем

НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ

QI

На первом этапе необходимо решить уравнение 66. Это подразумевает решение следующих четырех уравнений с положительными корнями

q 0,

q 1,

q 2,

q 3.

Надеюсь, приведенная мною страничка не стала для вас слишком большим испытанием.

Тем не менее, чтобы понять саму

идею , лежавшую в основе озарения Вальда, нам не нужны никакие формальные выкладки. Выше я уже все объяснил, причем не прибегая к каким бы то ни было математическим обозначениям. Поэтому вопрос моего студента остается открытым. Где здесь математика? Разве мы не имеем дело просто со здравым смыслом?

Да, именно так. Математика – это

и ест ь здравый смысл. Ведь на базовом уровне все вполне очевидно.

Как можно объяснить кому-то, что прибавление семи вещей к пяти вещам дает такой же результат, что и прибавление пяти вещей к семи вещам? Никак. Этот факт запечатлен в наших представлениях о сведении нескольких объектов в единое целое. Математики любят обозначать специальными терминами те явления, которые описывает наш здравый смысл. Вместо фразы: «Прибавление этого объекта к тому объекту – это то же самое, что прибавление того объекта к этому» – мы говорим: «Сложение коммутативно». А поскольку мы любим использовать символы, то записываем сказанное в таком виде:

при любых значениях

a и

b

a +

b =

b +

a .

Несмотря на официальный вид этой формулы, мы говорим здесь о факте, который инстинктивно понимает каждый ребенок.

Немного другой случай – умножение. Формула выглядит почти так же:

при любых значениях

a и

b

a x

b =

b x

a .

Мозг, анализирующий данное утверждение, соглашается с ним не так быстро, как в случае сложения. Разве отвечает здравому смыслу тот факт, что два набора из шести объектов дают в результате то же, что и шесть наборов из двух объектов?

Возможно, это утверждение и не отвечает здравому смыслу, но оно

может стать очевидным. Вот одно из моих первых математических воспоминаний. Я лежу на полу в доме своих родителей, щекой на жестком коврике, и смотрю на стереосистему. Скорее всего, я слушаю вторую сторону «Синего альбома» Beatles. Мне, наверное, лет шесть. Это происходит в семидесятых, значит, стереосистема установлена в корпусе из ДСП с прямоугольными отверстиями на боковой панели. Восемь отверстий по горизонтали, шесть отверстий по вертикали. Я лежу и рассматриваю эти отверстия. Шесть рядов отверстий. Восемь столбцов отверстий. Фокусируя свой взгляд то на одном, то на другом, я переключаю свой мозг с рядов на столбцы и наоборот. Шесть рядов с восемью отверстиями в каждом. Восемь столбцов с шестью отверстиями в каждом.

А затем я понял: восемь групп по шесть отверстий – это то же самое, что шесть групп по восемь отверстий. И не потому, что когда-то мне объяснили правило, а потому, что иначе быть не может. Как ни подсчитывай, но количество отверстий в панели останется одним и тем же.

Как правило, мы преподаем математику в виде длинного перечня правил. Вы изучаете эти правила, чтобы подчиняться им, потому что в противном случае вы получите тройку с минусом.

Но не это математика . Мы называем математикой изучение вещей, которые происходят определенным образом по той простой причине, что другого способа не существует.

Посмотрим правде в глаза: не все в математике можно сделать настолько доступным для нашей интуиции, как сложение и умножение. Дифференциальное и интегральное исчисление невозможно понять, руководствуясь только здравым смыслом. И все-таки исчисление

проистекает из здравого смысла: Ньютон взял наши фактические знания о движении объектов по прямой линии, составил формальное описание этого движения, а затем на основе формальной схемы построил универсальное математическое описание движения. Имея в своем распоряжении теорию Ньютона, вы можете применить ее к решению задач, от которых у вас голова пойдет кругом, если вы не призовете на помощь формулы. Точно так же в нас заложены ментальные системы оценки вероятности неопределенных событий. Однако эти системы довольно слабы и ненадежны, особенно когда речь идет о крайне редких событиях. Именно в этом случае мы подкрепляем свою интуицию фундаментальными теоремами и методами, построив на этой основе математическую теорию вероятностей.

Специальный язык, на котором математики общаются друг с другом, – это замечательный инструмент для точного и лаконичного описания сложных идей. Но из-за непонятности этого языка у людей непосвященных может возникнуть ощущение, что данная область мысли недоступна пониманию обычного человека. Но все не так.

Математика – это как работающее на атомной энергии вспомогательное приспособление, которое вы прикрепляете к своему здравому смыслу, многократно увеличив его охват и эффективность. Несмотря на всю силу математики, ее абстрактность и символику, порой внушающую страх, истинная умственная работа, которая требуется в ней, мало чем отличается от того, как мы размышляем над решением простых повседневных задач. В этом случае, на мой взгляд, полезно представить образ Железного человека[10], пробивающего дыру в кирпичной стене. С одной стороны, сила, пробивающая стену, порождена не мышцами Тони Старка, а совокупностью точно синхронизированных действий сервомеханизмов, которые приводит в движение компактный генератор бета-частиц. С другой стороны, с точки зрения Тони Старка, он просто пробивает стену – точно так же, как он сделал бы и без своего снаряжения, только тогда это было бы гораздо труднее.

Перефразируя Клаузевица, можно сказать, что математика – это продолжение здравого смысла иными средствами[11].

С одной стороны, без строгих структур, которые предоставляет математика, здравый смысл может ввести вас в заблуждение. Именно это произошло с командующими, которые хотели укрепить броней и без того надежные части самолета. С другой – формальная математика без здравого смысла (без постоянного взаимодействия между абстрактными рассуждениями и интуитивными догадками по поводу количества, времени, пространства, движения, поведения и неопределенности) была бы всего лишь бесплодным упражнением в следовании правилам и счетоводстве[12]. Другими словами, математика была бы именно тем, чем считает ее недовольный студент, изучающий математический анализ.

В этом кроется настоящая опасность. В эссе The Mathematician («Математик»)[13], опубликованном в 1947 году, Джон фон Нейман предупреждал:

На довольно большом удалении от своего эмпирического источника и тем более во втором и третьем поколении, когда математическая дисциплина лишь косвенно черпает вдохновение из идей, идущих от «реальности», над ней нависает смертельная опасность. Ее развитие все более и более определяется чисто эстетическими соображениями, оно все более и более становится искусством для искусства. Само по себе это неплохо, если она взаимодействует с примыкающими математическими дисциплинами, обладающими более тесными эмпирическими связями, или если данная математическая дисциплина находится под влиянием людей с исключительно развитым вкусом. Но существует серьезная угроза, что математическая дисциплина будет развиваться по линии наименьшего сопротивления, что вдали от источника поток разветвится на множество ручейков и дисциплина превратится в хаотическое нагромождение деталей и сложностей. Иначе говоря, при большом отдалении от эмпирического источника или после основательного абстрактного «инбридинга» (близкородственного скрещивания. –

Ю. Д.) математической дисциплине грозит опасность вырождения.

О какой математике пойдет речь в моей книге?

Если ваше знакомство с математикой ограничивается школьной программой, это означает, что вам известна весьма ограниченная, а в какой-то степени даже ложная версия этого предмета. Школьная математика состоит главным образом из совокупности фактов и правил – фактов, которые нельзя оспаривать, и правил, которые предписаны высшим авторитетом и не подлежат сомнению. Такой подход рассматривает математические концепции как нечто непреложное.

Но математика не неизменна. Даже если речь идет о базовых объектах изучения, таких как числа и геометрические фигуры, наше незнание гораздо больше знания. А то, что мы все же знаем, получено в результате огромных усилий, разногласий и недоразумений. Весь этот труд и смятение тщательно завуалированы в ваших учебниках.

Безусловно, факты фактам рознь. Никогда не было особых споров по поводу того, что 1 + 2 = 3. Но

можем ли мы действительно доказать , что 1 + 2 = 3, и как это можно сделать, – вопрос, который блуждает где-то между математикой и философией. Однако это совсем другая история, и мы вернемся к ней в конце книги. Правильность вычислений в данном случае не подлежит сомнению. Проблема кроется совсем в другом. Мы не раз столкнемся с ней на этих страницах.

Математические факты могут быть простыми и сложными, поверхностными и глубокими, что делит математическую вселенную на четыре сектора:

Базовые арифметические факты, такие как 1 + 2 = 3, относятся к категории простых и поверхностных. К этой же категории принадлежат и основные тождества, в частности sin(2

x) = 2sin

x x cos

x или формула корней квадратного уравнения. Возможно, убедить себя в истинности таких тождеств немного труднее, чем в том, что 1 + 2 = 3, но по большому счету они не так уж сложны на концептуальном уровне.

В сегменте сложных и поверхностных фактов находится, например, задача умножения двух десятизначных чисел, или вычисление сложного определенного интеграла, или (при условии, что вы пару лет учились в магистратуре) определение следа Фробениуса на модулярной форме кондуктора 2377. Можно предположить, что по какой-то причине вам понадобится найти ответ на вопрос такого рода, но поиск решения вручную, вне всяких сомнений, покажется слишком раздражающей и невыполнимой задачей. В случае модулярной формы вам, возможно, понадобится серьезное образование даже для того, чтобы понять, о чем идет речь. Однако в действительности знание этих ответов не обогащает понимание окружающего мира.

Сектор сложных и глубоких математических фактов – это именно то, на что тратят б

о льшую часть своего времени профессиональные математики, к числу которых отношусь и я. Здесь обитают знаменитые теоремы и гипотезы, такие как гипотеза Римана, последняя теорема Ферма[14], гипотеза Пуанкаре[15], равенство классов

P и

NP [16], теорема Гёделя и так далее. Каждая из этих теорем касается идей, имеющих глубокий смысл, фундаментальную важность, поразительную красоту и сугубо специальный характер, и каждая из них сама по себе выступает в качестве главного персонажа многих книг{12}.

Но только не моей. То, о чем пойдет речь в настоящей книге, относится к верхнему левому сектору, где находятся простые и глубокие факты. Вы сможете непосредственно, с выгодой для себя использовать представленные здесь математические идеи независимо от того, ограничивается ли ваше математическое образование основами алгебры или охватывает гораздо более широкую область математики. И речь идет не о «фактах самих по себе», таких как простые арифметические утверждения, а о принципах, применение которых выходит далеко за рамки привычных представлений о математике. Мы будем говорить о надежных практических инструментах – их применение поможет вам не совершать ошибок.

Чистая математика представляется чем-то вроде монастыря – спокойное место, надежно защищенное от влияния окружающего мира со всей его суетой и противоречиями. Я вырос в стенах такого убежища. Знакомых мне математически одаренных молодых людей интересовало практическое применение математики в физике или геномике, многих влекла черная магия управления хедж-фондами, но все эти подростковые шатания и проблемы выбора были не для меня[17]. Во время учебы в магистратуре я посвятил себя изучению теории чисел, которую Гаусс называл «королевой математики». Из всех чистых дисциплин это была самая чистейшая – закрытый сад посреди монастыря, где мы размышляли над теми же вопросами о числах и уравнениях, которые занимали умы древних греков и которые едва ли стали менее мучительными за прошедшие две с половиной тысячи лет.

Сначала я работал над теорией чисел в ее классическом виде, доказывая факты о суммах четвертых степеней целых чисел, о которых я при необходимости мог рассказать членам своей семьи на День благодарения, даже если мне и не удавалось объяснить им, как именно я доказал то, что доказал. Но вскоре я увлекся еще более абстрактными областями, изучая задачи, основные элементы которых («остаточно модулярные представления Галуа», «когомология модулярных схем», «динамические системы однородных пространств») невозможно было обсуждать за пределами архипелага университетских аудиторий, коридоров и комнат отдыха, раскинувшегося в водах Оксфорда, Принстона, Киото, Парижа и Мэдисона (штат Висконсин), где я сейчас преподаю. Если я назову все перечисленное волнующим, имеющим смысл и прекрасным и скажу вам, что мне никогда не надоедает размышлять над этими темами, вам придется просто поверить мне, поскольку требуется длительное обучение даже для того, чтобы выйти на уровень, на котором эти объекты изучения попадают в ваше поле зрения.

Но затем произошло нечто интересное. Чем более абстрактными и далекими от реальной жизни становились мои исследования, тем чаще я начал замечать, как много математики присутствует во внешнем мире, за стенами этого убежища. Речь идет не о представлениях Галуа или когомологиях, а о более простых, древних и не менее глубоких понятиях, попадающих в верхний левый сектор нашей таблицы математических концепций. Я начал писать для газет и журналов статьи о том, как выглядит мир сквозь призму математики, и, к своему удивлению, обнаружил, что их охотно читают даже люди, твердящие, как они ненавидят математику. Это было своего рода обучение математике, но обучение, весьма отличающееся от обычных занятий.

Но у такого подхода есть нечто общее с обычными занятиями. Это кое-какие задания, которые предстоит выполнить читателям. Давайте вернемся к эссе фон Неймана «Математик»:

Разобраться в устройстве самолета и понять природу сил, поднимающих самолет в воздух и приводящих его в движение, труднее, чем лететь в салоне самолета, подниматься в нем в заоблачную высь, покрывать огромные расстояния, и даже труднее, чем управлять самолетом.

Только в исключительных случаях процесс удается понять, не научившись применять его практически, руководствуясь инстинктом и опытом[18].

Другими словами, довольно трудно

понять математику,

не решая математических задач. Царской дороги в геометрии нет, как сказал Евклид Птолемею или – в зависимости от вашего источника – Менехм Александру Македонскому. (Надо признать, популярные изречения, приписываемые древним, вполне возможно, им не принадлежат, но это не делает их менее поучительными.)

В этой книге я не собираюсь вставать в позу и делать величественные жесты в сторону великих математических памятников, не буду учить вас восхищаться ими с большого расстояния. Нам предстоит с головой погрузиться в работу. Мы с вами сделаем кое-какие вычисления. Чтобы донести ту или иную мысль, мне придется, когда это понадобится, прибегать к помощи кое-каких формул и уравнений. Вам не понадобится никаких формальных математических знаний, кроме знаний арифметики, но в то же время вы узнаете о математике многое из того, что выходит за пределы арифметики. Я привожу здесь ряд упрощенных графиков и таблиц. Мы с вами встретим некоторые темы из школьной математики, но вне их обычной среды обитания. Мы узнаем, как тригонометрические функции описывают степени взаимозависимости между двумя переменными, что говорит математический анализ о соотношении между линейными и нелинейными явлениями, а также каким образом формула корней квадратного уравнения служит в качестве когнитивной модели научного познания. Кроме того, мы встретим здесь некоторые математические концепции, изучение которых обычно откладывается до колледжа или до университета. В частности, мы поговорим о таких вещах, как кризис в теории множеств, выступающий здесь в качестве метафоры для судебной практики Верховного суда и судейства в бейсболе; последние достижения в аналитической теории чисел, подтверждающие наличие взаимосвязи между структурой и случайностью; теория информации и комбинаторные схемы, позволяющие объяснить, как несколько студентов MIT выиграли миллионы долларов, разобравшись во внутреннем механизме лотереи штата Массачусетс.

В книге вы найдете рассказы об известных математиках, а также некоторые философские рассуждения. Представлены даже пара доказательств. Зато нет ни домашних заданий, ни тестов.

Часть I

Линейность

Кривая Лаффера

Суть математического анализа, изложенного на одной странице

Закон больших чисел

Некоторые аналогии с терроризмом

«Все американцы к 2048 году будут страдать избыточным весом»

Почему в Южной Дакоте заболеваемость раком мозга выше, чем в Северной Дакоте

Призраки усопших величин

Привычка определять

Глава первая

Стоит ли уподобляться Швеции

Несколько лет назад, в разгар дебатов вокруг «Закона о доступной медицинской помощи», Дэниел Митчелл из либертарианского Института Катона опубликовал в своем блоге статью с провокационным заголовком «Почему Обама пытается сделать Америку больше похожей на Швецию, тогда как сами шведы пытаются быть в меньшей степени шведами?»{13}.

Хороший вопрос! Скажем как можно мягче: это действительно кажется несколько странноватым. Почему, господин президент, мы плывем против течения истории, тогда как во всем мире страны с высоким уровнем социального обеспечения (даже богатая маленькая Швеция!) сокращают дорогостоящие социальные льготы и высокие налоги? «Если шведы извлекли уроки из собственных заблуждений и теперь пытаются сократить объем и границы государственного управления, то почему американские политики так стремятся повторять их ошибки?» – пишет Митчелл.

Ответ на этот вопрос требует построения в высшей степени научного графика. Вот как выглядит мир в понимании Института Катона.

Ось

x отображает здесь меру «шведскости»[19], а ось

y – некую меру благосостояния. Не имеет значения, в каких именно единицах отображены эти показатели. Суть вот в чем: согласно этому графику, чем выше у вас мера шведскости, тем в худшей ситуации находится ваша страна. Шведы, люди далеко не глупые, поняли это и начали двигаться по графику в северо-западном направлении, к благосостоянию, которое обеспечивает свободный рынок. Однако Обама движется не в том направлении.

Позвольте мне нарисовать эту же картину с точки зрения людей, экономические взгляды которых ближе к мнению Обамы, а не Института Катона.

Этот график дает совсем другие рекомендации по вопросу, в какой степени нам следует походить на Швецию. Где мы видим максимальный уровень благосостояния? В точке, в которой мера шведскости больше, чем в Америке, но меньше, чем в Швеции. Если это действительно так, тогда совершенно логично, что Обама увеличивает объем социального обеспечения, тогда как шведы сокращают его.

Разница между этими двумя графиками сводится к различиям между линейностью и нелинейностью[20], одному из основных разграничений в математике. Линия на графике Катона – это прямая[21], тогда как линия на втором графике (с горбом посередине) не является прямой. Прямая – это один, но не единственный тип линий, причем прямые могут иметь самые разные свойства, которых может и не быть у других линий. Самая высокая точка отрезка прямой (в данном примере – максимальный уровень благосостояния) должна находиться либо на одном конце, либо на другом. Такова природа прямых линий. Если снижение налогов способствует росту благосостояния, то чем ниже налоги, тем лучше. Следовательно, если шведы хотят расшведиться, так же должны поступить и мы. Безусловно, противники точки зрения Института Катона могут утверждать, что эта прямая наклонена в другом направлении и проходит с юго-запада на северо-восток. В таком случае объем расходов на социальное обеспечение не может быть слишком большим, а оптимальная политика сводится к тому, чтобы обеспечить максимальный уровень шведскости.

Как правило, когда кто-то заявляет, будто не относится к числу людей, мыслящих линейно, то очень скоро он начнет просить у вас прощения за потерю того, что вы ему одолжили на время. Однако нелинейность действительно существухет! А в данном контексте мыслить нелинейно крайне важно, поскольку не все линии бывают прямыми. Поразмышляв немного, вы поймете, что графики реальных экономических показателей напоминают второй, а не первый рисунок. Это кривые линии. Логика рассуждений Митчела являет собой пример

ложной линейности – не заявляя об этом в явной форме, он исходит из того, что динамику благосостояния описывает отрезок прямой, изображенный на первом рисунке. В таком случае, если Швеция сокращает свою социальную инфраструктуру, значит, нам следует сделать то же самое.

Но, если вы считаете, что уровень социального обеспечения может быть слишком высоким или слишком низким, значит, вы понимаете, что линейная картина происходящего ошибочна. Здесь действует несколько более сложный принцип, чем «больше государственного управления – это плохо, меньше – это хорошо». Генералы, пришедшие за советом к Абрахаму Вальду, столкнулись с аналогичной ситуацией: если на самолетах установить слишком мало брони, они будут сбиты, если слишком много – не смогут взлететь. Вопрос не в том, хороша или плоха дополнительная броня; возможно и то и другое в зависимости от того, сколько брони на самолетах уже установлено. Если и существует оптимальное решение проблемы, то оно находится где-то посередине, а что действительно плохо, так это отклонение от оптимума в любую сторону.

Нелинейное мышление означает следующее:

какой путь выбрать, зависит от того, где вы находитесь .

Мысль отнюдь не нова. Уже Гораций, живший во времена Римской империи, писал:

Est modus in rebus, sunt certi denique fines,

Quos ultra citraque nequit consistere rectum {14}.

Мера должна быть во всем, и всему есть такие пределы,

Дальше и ближе которых не может добра быть на свете! [22]

Еще раньше Аристотель в своей «Никомаховой этике» предупреждал, что «питье и еда при избытке или недостатке губят здоровье, в то время как все это в меру ‹…› и создает его, и увеличивает, и сохраняет»[23]. Оптимум находится где-то посередине, поскольку зависимость между питанием и здоровьем представляет собой не прямую, а кривую линию с плохим результатом на обоих концах.

Экономическое шаманство

Парадокс в том, что экономисты-консерваторы – вроде исследователей Института Катона – понимают это лучше, чем кто-либо другой. Помните вторую картинку – ту, которую нарисовал я? Тот самый в высшей степени научный график с горбом посередине? Я далеко не первый, кто изобразил это. График такого типа, получивший название «кривая Лаффера», уже почти сорок лет играет центральную роль в экономике республиканцев. Примерно в середине президентского срока Рейгана кривая Лаффера стала настолько распространенной темой экономических дискуссий, что Бен Стайн в фильме Ferris Bueller’s Day Off («Выходной день Ферриса Бьюлера»[24]) экспромтом включил ее в свой знаменитый невыносимо скучный школьный урок:

Кто-нибудь знает, что это? Эй, класс? Кто-нибудь знает? Кто-нибудь встречал это раньше? Кривая Лаффера. Сегодня продолжается дискуссия по этому вопросу… Кто-нибудь знает суть этих дискуссий? Класс? Кто ответит? Есть желающие? Кто-то знает, что это такое? Это значит, в этой точке кривой дохода вы получите точно такую же сумму, как и в этой. Это спорный вопрос. Кто-нибудь знает, как вице-президент Буш назвал это в восьмидесятые годы? Кто-нибудь знает? Насчет экономики? Что-то там… ду-ду экономика? Вуду-экономика, экономическое шаманство.

С кривой Лаффера связана такая легенда. Однажды в 1974 году Артур Лаффер, который был в то время профессором экономики Чикагского университета, ужинал с Диком Чейни, Дональдом Рамсфелдом и тогдашним главным редактором Wall Street Journal Джудом

Ванниски в ресторане одного фешенебельного вашингтонского отеля. Во время ужина заговорили о предложенной президентом Фордом схеме налогообложения. Возник спор, и в итоге, как обычно водится среди людей творческих, когда разногласия достигают наибольшего накала, Лаффер схватил салфетку и изобразил на ней рисунок[25].

Здесь горизонтальная ось отображает уровень налогообложения, а вертикальная – объем доходов, полученных правительством от налогов, выплаченных налогоплательщиками. С левой стороны графика налоговая ставка составляет 0 %; в этом случае правительство по определению не получает никакого дохода от налогов. Справа ставка налога составляет 100 %; это означает, что, каким бы ни был ваш доход – будь то прибыль от вашего бизнеса или заработная плата, получаемая вами от работодателя, – абсолютно все уходит в карман дядюшки Сэма.

Но это бессмысленно. Если правительство отнимает у вас все до последнего цента из зарплаты, которую вам платят за то, что вы преподаете в школе, или продаете оборудование, или занимаете пост руководителя среднего звена, – то зачем вам нужна такая работа? Когда уровень налогообложения дойдет до правого края графика, люди вообще перестанут работать. Но если и будут продолжать, то исключительно в системе неофициальной экономики, куда сборщикам налогов доступ закрыт. Правда, в таком случае правительственные доходы тоже будут равны нулю.

Правительство все-таки имеет определенный объем доходов от налогообложения – в случае когда налоговые ставки попадают в промежуточный диапазон посередине кривой, то есть где-то между нулевой долей нашего дохода и всем доходом. Собственно, так и происходит в реальном мире{15}[26].

Это означает, что линия, отображающая зависимость между налоговой ставкой и правительственным доходом, не может быть прямой. Если было бы так, объем доходов от налогообложения оказался бы максимальным как с левой, так и с правой стороны графика, однако в обоих случаях он равен нулю. Если текущая ставка подоходного налога действительно близка к нулю, то есть вы находитесь с правой стороны графика, повышение налогов приведет к тому, что в распоряжении правительства будет больше денег для финансирования различных социальных программ, как, возможно, вам и подсказывает интуиция. Однако если подоходный налог близок к 100 %, повышение налогов на самом деле приведет к

сокращению правительственных доходов. Если вы находитесь с правой стороны от вершины кривой Лаффера и хотите сократить дефицит бюджета без сокращения расходов, есть простое и замечательное с политической точки зрения решение: снизить уровень налогообложения, тем самым увеличив общую сумму налогов, которые вы взимаете.

Какой путь выбрать, зависит от того, где вы находитесь .

Так где мы находимся? Здесь и начинаются трудности. Максимальная ставка подоходного налога в 1974 году составляла 70 %, и мысль о том, что Америка находится на нисходящем участке кривой Лаффера, представляла определенный интерес – особенно для тех счастливчиков, которым повезло платить налоги по этой ставке, распространявшейся только на доход, превышающий 200 тысяч долларов[27]. Кривая Лаффера получила сильного сторонника в лице Ванниски, который донес ее идею до сознания общественности в 1978 году, в книге с довольно самонадеянным названием The Way the World Works («Как устроен мир»[28]). Ванниски по-настоящему верил в эту теорию и отстаивал ее не только с большим рвением, но и с дипломатичным благоразумием, позволившим ему привлечь к ней надлежащее внимание. А ведь даже сторонники снижения налогов считали концепцию кривой Лаффера слишком радикальной. Ванниски совсем не задевало, когда его называли чудаком: «Томас Эдисон был чудаком, Лейбниц был чудаком, Галилей был чудаком и так далее и тому подобное. Каждого, кто выдвигает новые идеи наперекор расхожему мнению, новые идеи, раздвигающие границы устоявшихся научных направлений, считают сумасшедшим»{16}.

(

Отступление. Здесь важно отметить, что люди, которые выдвигают идеи, выходящие за рамки общепринятого, и которые сравнивают себя с Эдисоном и Галилеем,

никогда не бывают правы . Я получаю письма, написанные в таком духе, примерно один раз в месяц, как правило, пишут их люди, «доказавшие» математические утверждения, про которые уже сотни лет известно, что они ложные. Могу вас заверить, что Эйнштейн не говорил людям: «Послушайте, я знаю, что теория относительности звучит как бред сумасшедшего, но ведь то же самое говорили об идеях Галилея!»)

Кривая Лаффера с ее компактным графическим представлением и притягательной парадоксальностью быстро нашла своих сторонников среди политиков, и раньше выступавших за снижение налогов. Экономист Хэл Вариан сказал об этом: «Вы можете объяснить что-то члену Конгресса за шесть минут, а он будет говорить об этом шесть месяцев»{17}. Ванниски стал советником сначала Джека Кемпа[29], а затем Рональда Рейгана, чей богатый опыт работы в Голливуде в 1940-е годы, когда он был всего лишь кинозвездой, заложил основы его представлений об экономике, что понадобилось ему четыре десятилетия спустя. Дэвид Стокман, руководитель административно-бюджетного управления в период президентства Рейгана, вспоминает:

«Я узнал, что такое большие деньги, снимаясь в фильмах во время Второй мировой войны», – так всегда говорил [Рейган. –

Д. Э.]. В то время добавочный подоходный налог достиг 90 %. «Можно было сняться в четырех картинах – и вы уже в более высоком разряде налогообложения. Поэтому примерно после четырех фильмов мы бросали работу и уезжали в деревню», – продолжал Рейган. Высокий налог приводит к тому, что люди работают меньше. Низкий налог приводит к тому, что они работают больше. Его опыт доказал это{18}.

В наши дни трудно найти экономиста с хорошей репутацией, считающего, будто мы находимся на нисходящем участке кривой Лаффера. Может быть, в этом и нет ничего удивительного, если учитывать, что в настоящее время с самых высоких доходов взимается налог по ставке всего 35 %, которая показалась бы абсурдно низкой на протяжении большей части XX столетия. Но даже во времена Рейгана мы, по всей вероятности, находились с левой стороны кривой Лаффера. Экономист Гарвардского университета Грегори Мэнкью – республиканец, возглавлявший совет консультантов по экономическим вопросам при президентстве второго Буша, – пишет в своем учебнике по микроэкономике:

Дальнейшая история не подтвердила гипотезу Лаффера по поводу того, что снижение налоговых ставок приводит к увеличению налоговых поступлений. Когда после избрания на пост президента Рейган снизил налоги, объем налоговых сборов сократился, а не увеличился. За период с 1980 по 1984 год поступления от подоходного налога с физических лиц сократились на 9 % (на человека, с учетом инфляции), хотя средний доход (на человека, с учетом инфляции) возрос на 4 % за тот же период. Тем не менее изменить действующую налоговую политику было трудно{19}.

Теперь самое время по достоинству оценить точку зрения сторонников экономики предложения. Прежде всего следует отметить, что максимальное увеличение правительственных доходов не обязательно должно быть целью налоговой политики. Милтон

Фридман, с которым мы уже встречались, когда он выполнял секретную военную работу для Группы статистических исследований во времена Второй мировой войны, стал впоследствии лауреатом Нобелевской премии по экономике, советником ряда президентов, последователем либертарианской философии и влиятельным сторонником снижения налогов. Знаменитый лозунг Фридмана звучит так: «Я сторонник снижения налогов в любых обстоятельствах, под любым предлогом и при любой возможности». Он считал, что мы не должны стремиться к вершине кривой Лаффера – точке, в которой налоговые сборы правительства достигают максимума. В понимании Фридмана собранные правительством деньги в конечном счете будут израсходованы тем же правительством, причем в таком случае деньги будут потрачены скорее плохо, чем хорошо.

Сторонники экономики предложения, придерживающиеся более умеренных взглядов, – как, например, Мэнкью, – утверждают, что снижение налогов может усилить мотивацию людей работать больше и открывать новые компании, что в итоге приведет к укреплению экономики, даже если прямой эффект снижения налогов – это сокращение правительственных доходов и увеличение бюджетного дефицита. Экономист, больше сочувствующий идее перераспределения доходов, отметил бы, что это палка о двух концах, поскольку сокращение правительственных расходов может означать, что правительство будет выделять меньше средств на инфраструктуру, менее строго бороться с мошенничеством и в целом предпринимать меньше всех тех действий, которые способствуют развитию свободного предпринимательства.

Кроме того, по мнению Мэнкью, самые богатые люди, платящие налог на верхнюю часть дохода по ставке 70 %,

действительно увеличили налоговые поступления после предпринятого Рейганом снижения налогов[30]. Это создает несколько тревожную возможность того, что максимальное увеличение правительственных доходов может быть достигнуто за счет повышения налогов на представителей среднего класса, которым не останется ничего другого, кроме как продолжать работать, при одновременном снижении налогов на накопивших достаточно богатства богатых людей. Но если правительство введет налог, который покажется среднему классу слишком высоким, то возникнет реальная угроза сокращения деловой активности и, напротив, ее усиления в офшорных зонах. При таком развитии событий многим либералам придется примкнуть к точке зрения Милтона Фридмана: возможно, максимальное увеличение правительственных доходов – не такая уж хорошая идея.

Итоговый вывод Мэнкью довольно корректен: «Аргумент Лаффера нельзя назвать полностью необоснованным». Я бы воздал должное Лафферу в большей мере! Его рисунок проиллюстрировал фундаментальную и неопровержимую математическую идею: зависимость между налогообложением и налоговыми поступлениями в казну неизбежно носит нелинейный характер. Безусловно, кривая этой зависимости не обязательно должна представлять собой один ровный изгиб, как на рисунке Лаффера. Эта кривая может иметь форму трапеции.

Или напоминать по форме спину одногорбого верблюда.

Или иметь сильно осциллирующую форму[31]{20}.

В любом случае, если эта кривая направлена вверх в одном месте, она непременно развернется вниз в другом. Существует такая вещь, как чрезмерная мера шведскости. Ни один экономист не станет спорить с этим утверждением. Кроме того, сам Лаффер подчеркивал, что многие социологи понимали это задолго до него. Лаффер прекрасно осознавал, что его кривая не позволяет определить, является ли экономика той или иной страны обремененной слишком высокими налогами в данное время. Именно поэтому он не привел на своем рисунке никаких конкретных показателей. Когда во время слушаний в Конгрессе{21} один из участников задал вопрос о местоположении точки оптимального уровня налогообложения, Лаффер признал: «Я не могу определить этот уровень, но могу сказать, какими должны быть его характеристики, сэр». Кривая Лаффера говорит только о том, что при определенных обстоятельствах снижение налоговых ставок может привести к увеличению налоговых поступлений, однако определение этих обстоятельств требует выполнения глубоко продуманной, трудной эмпирической работы – работы, описание которой не поместится на салфетке.

С кривой Лаффера все в порядке, не совсем хорошо обстоит дело с тем, как ее используют. Последовавшие за дудочкой Ванниски политики стали жертвой старейшего ложного силлогизма, присутствующего в его книге:

Вполне возможно , что снижение налогов приведет к увеличению объема государственных доходов.

Мне хотелось бы , чтобы снижение налогов привело к увеличению объема государственных доходов.

Таким образом, это именно тот случай , когда снижение налогов приведет к увеличению объема государственных доходов[32].

Глава вторая

Локально прямая, глобально кривая

Наверное, вы не думаете, что вам нужен профессиональный математик, который объяснит, что не все линии прямые. Однако линейные рассуждения присутствуют повсюду. Вы прибегаете к ним каждый раз, когда утверждаете, что если хорошо иметь нечто, то лучше иметь этого еще больше. Именно так рассуждают политические крикуны: «Вы поддерживаете военные действия против Ирана? Тогда, полагаю, вы предпочли бы осуществить

сухопутную операцию против любой страны, которая

лишь косо посмотрит в нашу сторону !» В то же время звучит и такое: «Хотите поддерживать взаимодействие с Ираном? Наверное, вы

также считаете, что и

Адольфа Гитлера просто

неправильно поняли ».

Почему такие рассуждения столь распространенны? Ведь даже малейшее умственное усилие с нашей стороны позволит осознать их ошибочность. Почему вообще у кого бы то ни было может хотя бы на мгновение возникнуть мысль, что все линии прямые, когда совершенно очевидно обратное?

Одна из причин заключается в следующем: в каком-то смысле они действительно прямые. История эта начинается с Архимеда.

Метод исчерпывания

Чему равна площадь данного круга?

В современном мире это настолько стандартная задача, что ее можно включать в SAT[33]. Площадь круга равна ?

r ?, а в нашем случае радиус равен 1, значит, площадь этого круга равна ?. Однако две тысячи лет назад вопрос был открытым и настолько важным, что привлек внимание Архимеда.

Почему вопрос площади окружности оказался настолько сложным? Во-первых, на самом деле древние греки не считали ? числом, как считаем мы. В их понимании все числа были целыми, то есть такими, с помощью которых можно что-то подсчитать: 1, 2, 3, 4… Однако теорема Пифагора[34] – первый большой прорыв в древнегреческой геометрии – превратила всю их систему счисления в руины.

Перейдем к следующему рисунку.

Теорема Пифагора гласит, что квадрат

гипотенузы (сторона прямоугольного треугольника, которая нарисована здесь по диагонали и не проходит через прямой угол) равен сумме квадратов двух других сторон, или

катетов . В данном примере квадрат гипотенузы равен 1? + 1? = 1 + 1 = 2. Это означает, что гипотенуза длиннее 1, но короче 2. Проверяется без всяких теорем – просто на глаз. Сам факт, что длина гипотенузы не представляет собой целое число, не был проблемой для древних греков. Может быть, мы просто измеряли все не в тех единицах. Если мы выберем такую единицу длины, чтобы длина катетов была равна 5 единицам, тогда вы с помощью линейки легко проверите, что в таком случае длина гипотенузы составит почти 7 единиц. Почти – но все-таки немного больше, поскольку квадрат гипотенузы равен:

5? + 5? = 25 + 25 = 50,

но если длина гипотенузы составляла бы 7 единиц, квадрат гипотенузы был бы равен 49.

А если мы взяли бы катеты длиной 12 единиц, длина гипотенузы была бы равна почти 17 единиц, но все же немного короче, поскольку 12? плюс 12? равно 288, что незначительно меньше чем 17?, равное 289.

Примерно в V столетии до нашей эры один из представителей пифагорейской школы сделал потрясающее открытие:

не существует способа измерить равнобедренный прямоугольный треугольник таким образом, чтобы длина каждой его стороны представляла собой целое число. Современный человек сказал бы, что «квадратный корень из 2 – это иррациональное число», то есть число, которое нельзя представить в виде соотношения двух целых чисел. Но пифагорейцы так не говорили. Разве могли они сказать нечто подобное? В основе их представлений о количестве лежала идея о соотношении целых чисел. Следовательно, в их понимании длина гипотенузы, как оказалось,

вообще не есть число .

Это повлекло за собой неразбериху. Вы наверняка помните, что пифагорейцы были крайне своеобразными людьми. Их философия представляла собой рагу из суждений, часть которых мы назвали бы математикой, часть – религией и оставшуюся часть – психическим расстройством. Пифагорейцы были убеждены, что нечетные числа символизируют добро, тогда как четные – зло, что по ту сторону Солнца находится планета Антихтон (Антиземля, Противоземля), а также что нельзя есть бобы, как писали некоторые, потому, что в них находятся души умерших. Ходили слухи, будто Пифагор разговаривал с домашним скотом (он велел животным не есть бобы), а также что он был одним из немногих древних греков, носивших штаны{22}[35].

Математика пифагорейцев была неразрывно связана с их идеологией. Легенда (которая, возможно, не совсем соответствует действительности, но дает правильное представление о пифагорейском стиле) гласит, что первым пифагорейцем, открывшим иррациональность квадратного корня из 2, был человек по имени Гиппас; в награду за доказательство этой отвратительной теоремы соратники бросили его в море, где он и утонул.

Но теорему не утопишь. Преемники пифагорейцев, такие как Евклид и Архимед, понимали, что нужно просто закатать рукава и начать все измерять, даже если придется ради этого выйти за пределы высокой стены, окружавшей цветущий сад целых чисел, столь милый их сердцу. Никто не знал, можно ли выразить площадь круга с помощью одних только целых чисел[36]. Однако колеса необходимо строить, а силосные башни заполнять[37], а значит, такие измерения должны быть выполнены.

Первоначальную идею предложил Евдокс Книдский, а Евклид включил ее в 12-ю книгу «Начал». Однако именно Архимед довел их дело до конца. В наши дни мы называем этот подход методом исчерпывания. А начинается он вот с чего.

Изображенный на этом рисунке квадрат называется «вписанный квадрат»: каждый его угол только касается окружности, но не выходит за ее границы. Зачем это делать? Потому что круг

– нечто загадочное и пугающее, тогда как с квадратом все просто и ясно. Если у вас есть квадрат, длина стороны которого равна

X , его площадь равна

X умножить на

X – именно поэтому мы и называем умножение числа на самого себя возведением в квадрат! Основное правило математической жизни гласит: если мироздание ставит перед вами сложную задачу, попытайтесь решить вместо нее более простую – с расчетом на то, что упрощенный вариант окажется настолько близким к первоначальной версии, что мироздание не станет возражать против такого решения.

Вписанный квадрат можно разбить на четыре треугольника, каждый из которых представляет собой не что иное, как равнобедренный прямоугольный треугольник, который мы только что нарисовали[38]. Следовательно, площадь такого квадрата в четыре раза больше площади треугольника. Треугольник в свою очередь – это то, что получится, если взять квадрат 1 x 1 и разрезать его пополам, как бутерброд с тунцом.

Площадь такого бутерброда равна 1 x 1 = 1, значит, площадь каждого треугольника равна 1/2 , а площадь вписанного квадрата составляет четыре раза по 1/2 , то есть 2.

Кстати, предположим вы

не знакомы с теоремой Пифагора. Так вот, на всякий случай сообщаю: вы ее все-таки знаете! Или как минимум знаете, что она должна гласить применительно к данному прямоугольному треугольнику. Ведь прямоугольный треугольник, представляющий собой нижнюю часть нашего бутерброда, точно такой же, как и верхний левый фрагмент вписанного квадрата. А его гипотенуза – сторона вписанного квадрата. Следовательно, если вы возведете длину гипотенузы в квадрат, то получите площадь вписанного квадрата, которая равна 2. Другими словами, длина гипотенузы есть число, квадрат которого равен 2, или, если использовать привычную и более лаконичную формулировку, квадратный корень из 2.

Вписанный квадрат полностью находится в пределах окружности. Если его площадь равна 2, площадь круга должна составлять

минимум 2 единицы.

Теперь давайте нарисуем другой квадрат.

Этот квадрат, который обозначается термином «описанный квадрат», также касается окружности всего в четырех точках, но теперь окружность находится внутри него. Длина сторон такого квадрата равна 2 единицам, значит, его площадь составляет 4 единицы. Следовательно, теперь мы знаем, что площадь круга равна максимум 4 единицам.

Возможно, иллюстрация того, что число ? должно находиться в пределах от 2 до 4, производит не такое уж большое впечатление. Но Архимед только начинает. Возьмите четыре вершины вписанного квадрата и обозначьте на окружности новые точки, равноудаленные от каждой пары смежных вершин. Теперь у вас на окружности восемь точек, расположенных на равном расстоянии друг от друга. Соединив их, вы получите вписанный восьмиугольник, или, если говорить на техническом языке, «стоп-сигнал».

Вычислить площадь вписанного восьмиугольника немного труднее, но я не собираюсь утруждать вас тригонометрией. Важно, что мы по-прежнему имеем дело с прямыми и вершинами, а не с кривыми, поэтому данную задачу можно было решить с помощью методов, которые были в распоряжении Архимеда. Так вот, площадь восьмиугольника в два раза больше квадратного корня из 2, то есть примерно 2,83.

Вы можете сыграть в ту же игру с описанным восьмиугольником, площадь которого равна 8(?2 – 1), немногим более 3,31.

Таким образом, площадь круга находится в пределах от 2,83 до 3,31.

Но зачем останавливаться на этом? Вы можете обозначить на окружности точки, равноудаленные от вершин восьмиугольника (вписанного или описанного), – и получите шестнадцатиугольник; дополнительные тригонометрические расчеты покажут, что площадь круга находится в пределах от 3,06 до 3,18. Проведите процедуру еще раз, чтобы получить 32-угольник, а затем повторите снова и снова – и вскоре получите нечто похожее на такую фигуру.

Но разве это не окружность? Разумеется, нет! Это правильный многоугольник с 65 536 сторонами! Неужели вы не видите?

Великое озарение Евдокса и Архимеда состоит в том, что на самом деле

не имеет значения , что это за фигура – окружность или многоугольник с очень большим количеством очень коротких сторон. Площади этих двух фигур достаточно близки для любых возможных целей. Площадь небольшой области между окружностью и многоугольником была «исчерпана» в процессе нашего неутомимого последовательного приближения. Да, окружность – это кривая, это действительно так. Но каждый крохотный фрагмент этой кривой можно приблизить к идеально прямой линии, подобно тому как крохотный кусочек поверхности Земли, на котором мы стоим, приближен к идеально ровной плоскости[39].

Следует запомнить девиз: локально прямая, глобально кривая.

Или лучше представьте: вы мчитесь по направлению к окружности с большой высоты; сначала вы видите всю окружность;

затем только один сегмент дуги окружности;

а затем еще более мелкий сегмент.

Продолжайте это до тех пор, пока, приближаясь все больше и больше, вы не увидите нечто напоминающее прямую линию. Ползущему по кругу муравью, видящему лишь пространство, непосредственно его окружающее, представляется, будто он ползет по прямой. Точно так же человеку, стоящему на поверхности Земли, кажется, что он стоит на плоскости (если только он не окажется настолько проницательным, что обратит внимание, как на горизонте поднимаются приближающиеся издалека объекты).

Суть математического анализа, изложенного на одной странице

Теперь я хочу объяснить вам суть математического анализа. Готовы? Вот идея, за которую мы должны благодарить Исаака Ньютона: в идеальном круге нет ничего особенного.

Каждая гладкая кривая при достаточном увеличении масштаба напоминает прямую линию[40]. Не имеет значения, насколько изогнута или закручена эта кривая, – главное, что у нее нет острых углов.

Когда вы запускаете ракету, траектория ее перемещения выглядит так.

Ракета сначала движется вверх, а затем вниз, образуя параболическую дугу. Сила тяжести изгибает любую траекторию движения по направлению к поверхности Земли; это один из самых фундаментальных законов нашей физической жизни. Но, если мы увеличим масштаб и рассмотрим очень короткий отрезок этой кривой, она будет выглядеть так.

Затем так.

Как и в случае окружности, траектория движения ракеты кажется прямой линией, направленной вверх под определенным углом. Безусловно, эта линия отклоняется под действием силы тяжести, но подобное отклонение слишком незначительно, чтобы увидеть его невооруженным глазом. Приближение к еще более мелкому участку кривой делает линию еще больше похожей на прямую. Чем больше приближение, тем ровнее участок кривой.

А теперь сделаем концептуальный скачок. Ньютон сказал: послушайте, давайте пойдем до конца. Уменьшайте поле зрения до тех пор, пока оно не станет бесконечно малой величиной – настолько малой, что она будет меньше любого размера, который вы можете назвать, но все же не равной нулю. Вы изучаете траекторию движения ракеты не на протяжении очень короткого периода, а в один момент времени. В таком случае то, что было

почти прямой линией, становится

в точности прямой. Наклон этой кривой Ньютон называл

флюксией , а мы называем

производной .

Именно этот скачок не был готов совершить Архимед. Он понимал, что многоугольники с более короткими сторонами все более и более приближаются к окружности, но он никогда не говорил о том, что в действительности окружность представляет собой многоугольник с бесконечно большим количеством бесконечно малых сторон.

Некоторые современники Ньютона также не разделяли его точку зрения. Наиболее активно возражал Ньютону Джордж Беркли, который критиковал концепцию бесконечно малых величин Ньютона в крайне издевательском тоне{23}, как, к сожалению, сейчас уже не пишут в математической литературе:

А что такое эти флюксии? Скорости исчезающих приращений. А что такое эти самые исчезающие приращения? Они не есть ни конечные величины, ни величины бесконечно малые, но они и не нули. Разве мы не имеем права назвать их призраками (ghosts) исчезнувших величин?[41]

Тем не менее исчисление бесконечно малых все-таки

работает . Если вы раскрутите привязанный к веревке камень над головой, а затем резко отпустите его, он улетит по прямолинейной траектории с постоянной скоростью[42] в направлении, в котором, согласно расчетам, он движется в тот момент, когда вы его отпускаете. Это еще одна идея Ньютона: движущиеся объекты склонны перемещаться по прямолинейной траектории, если какая-то другая сила не заставляет объект отклоняться в ту или иную сторону. Это и есть одна из причин, почему линейное мышление настолько естественно для нас: интуитивное восприятие времени и движения формируется у нас под воздействием явлений, которые мы наблюдаем в окружающем мире. Еще до того, как Ньютон сформулировал свои законы, мы, люди, в глубине души знали, что все вокруг нас стремится двигаться по прямой, если только нет причин двигаться иначе.

Бесконечно малые приращения и ненужные затруднения

Критики Ньютона в чем-то были правы: его толкование производной далеко от того, что в наши дни принято называть строгой математикой. Проблема заключается в концепции бесконечно малой величины, которая на протяжении тысяч лет была для математиков камнем преткновения. Трудности начались с древнегреческого философа V столетия до нашей эры Зенона, представителя Элейской школы, который часто задавал по поводу физического мира на первый взгляд невинные вопросы, неизменно перераставшие в серьезные философские дискуссии.

Представляю вам самый знаменитый парадокс Зенона в вольном переложении. Я решаю сходить в магазин за мороженым. Конечно, я не смогу преодолеть весь путь до магазина, пока не пройду половину этого пути. А как только я пройду половину пути, я все равно не смогу добраться до магазина, пока не преодолею половину оставшегося пути. Когда я сделаю это, мне все равно предстоит преодолеть половину оставшегося расстояния – и так далее. Я могу подходить к магазину все ближе и ближе, но, сколько бы этапов этого процесса я ни прошел, на самом деле мне так и не удастся добраться до магазина. У меня всегда будет оставаться пусть крохотное, но все же ненулевое расстояние до моих двух шариков мороженого. Эта аргументация применима к любому другому пункту назначения: в равной мере невозможно перейти улицу, или сделать один-единственный шаг, или взмахнуть рукой. Любое движение исключено.

Говорят, что киник Диоген опроверг доводы Зенона довольно простым методом: он встал и прошел из одного конца комнаты в другой. Это весьма хороший довод в пользу того, что движение все же возможно, а значит, что-то не так с доводами Зенона[43]. Но где же была ошибка?

Разбейте путь в магазин на фрагменты, представленные в числовой форме. Сначала вы проходите половину пути. Затем преодолеваете половину оставшегося пути, то есть 1/4 общего расстояния, и у вас остается еще 1/4 пути. Далее половина оставшегося расстояния составляет 1/8, затем 1/16, затем 1/32. Таким образом, ваше перемещение к магазину можно представить в следующем виде:

1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + …

Сложив десять первых членов этой последовательности, вы получите 0,999. Сумма первых двадцати членов последовательности составит 0,999999. Другими словами, вы действительно приближаетесь – очень-очень приближаетесь – к магазину. Тем не менее, сколько бы членов этой последовательности вы ни сложили, вы никогда не получите 1.

Парадокс Зенона во многом напоминает другую головоломку: равна ли периодическая десятичная дробь 0,99999… единице?

Я видел, как люди едва не вступали в драку из-за этого вопроса[44]. По этому поводу ведутся жаркие споры на самых разных веб-сайтах, от страниц фанатов игры World of Warcraft («Вселенная Варкрафта») до форумов, посвященных творчеству Айн Рэнд. Наша естественная реакция на аргументы Зенона такова: «В конечном счете вы непременно получите свое мороженое». Но в данном случае интуиция подсказывает совсем иной ответ. Большинство людей{24} (если потребовать от них однозначного ответа) скажут, что 0,9999… не равно 1. Это число даже

не похоже на единицу, это уж точно. Оно меньше единицы. Однако ненамного меньше! Подобно любителю мороженого в парадоксе Зенона, оно все ближе и ближе подходит к своей цели, но похоже на то, что так и не доберется до нее.

И все-таки преподаватели математики, в том числе и я сам, скажут им: «Нет, это число равно 1».

Как мне привлечь хоть кого-нибудь на свою сторону? Один хороший способ – привести следующие доводы. Все знают, что:

0,33333… = 1/3.

Умножьте обе стороны на 3 – и получите такой результат:

0,99999… = 3/3 = 1.

Если это вас не убедило, попытайтесь умножить 0,99999… на 10, для чего нужно просто перенести десятичную запятую на одну позицию вправо.

10 x (0,99999…) = 9,99999…

Теперь надо вычесть раздражающее десятичное число из обеих сторон равенства:

10 x (0,99999…) - 1 x (0,99999…) = 9,99999… - 0,99999…

Левая сторона равенства представляет собой просто 9 x (0,99999…), поскольку 10 умножить на что-то минус что-то равно 9 умножить на вышеупомянутую величину. А в правой части равенства нам удалось удалить ужасное бесконечное десятичное число, после чего у нас осталось просто 9. В итоге мы получим:

9 x (0,99999…) = 9.

Если 9 умножить на что бы то ни было равно 9, тогда это что-то должно быть равно 1, не так ли?

Как правило, чтобы убедить людей, подобных доводов вполне довольно. Но будем честны: в этой аргументации кое-чего не хватает. В действительности приведенные выше доводы не устраняют тревожную неопределенность, вызванную заявлением, что 0,99999… = 1; напротив, они представляют собой своего рода алгебраическое устрашение: «Вы верите в то, что 1/3 равно 0,3 в периоде, не так ли?

Ведь вы действительно верите в это? »

Или еще хуже: скорее всего, вас убедили мои доводы, в основе которых лежало умножение на 10. Но как насчет следующего довода? Чему равно:

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …?

Здесь троеточие означает, что мы продолжаем вычислять сумму бесконечно, каждый раз прибавляя величину, которая в два раза больше предыдущей. Очевидно, что эта сумма должна быть бесконечной! Однако довод, во многом напоминающий на первый взгляд корректный аргумент в отношении 0,99999…, как будто говорит об обратном. Умножьте представленную выше сумму на 2 – и получите:

2 x (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …) = 2 + 4 + 8 + 16 + …

Этот результат очень похож на исходную сумму; на самом деле это и есть исходная сумма (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …), но без 1 в начале, а это значит, что 2 x (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …) меньше (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …). Другими словами:

2 x (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …) – 1 x (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …) = -1.

Однако, выполнив упрощающие преобразования, левую сторону этого равенства можно привести к той самой сумме, с которой мы начали, получив при этом такой результат:

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + … = -1.

Именно в

это вы готовы поверить?[45] В то, что прибавление все б

о льших и б

о льших чисел до бесконечности приведет вас в область отрицательных чисел?

А вот еще более бредовая идея. Чему равно значение бесконечной суммы:

1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + …?

Кто-то может сразу же сделать вывод, что эта сумма составляет:

(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + … = 0 + 0 + 0 + …,

и заявит при этом, что сумма множества нолей, пусть и бесконечно большого, должна быть равной 0. С другой стороны, 1 - 1 + 1 – это то же самое, что 1 - (1 - 1), поскольку отрицательное значение отрицательного числа – число положительное. Многократное применение этой операции позволяет нам переписать нашу сумму в таком виде:

$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots$

Данный результат точно так же требует вывода, что данная сумма равна 1!

Так чему же равна эта сумма, 0 или 1? Или она в половине случаев равна 0 и еще в половине случаев – 1? Создается впечатление, что это зависит от того, где вы остановитесь, но ведь бесконечные суммы никогда не останавливаются!

Не делайте пока никаких выводов, потому что на самом деле все еще сложнее. Предположим, наша загадочная сумма имеет значение

T :

$T = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Умножение на -1 обеих сторон этого уравнения дает следующий результат:

-

$T = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$

Однако сумма с правой стороны уравнения – это именно то, что вы получите, если возьмете исходную сумму, равную

T , и удалите из нее первую 1, то есть вычтете 1 из этой суммы. Другими словами:

-

$T = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots =$

$T - 1.$

Таким образом, $-T = T – 1$ – уравнение с участием

T , которое выполняется только в случае, если

T равно 1/2. Может ли сумма бесконечно большого количества целых чисел каким-то волшебным образом превратиться в дробное число? Тот, кто говорит «нет» в ответ на этот вопрос, действительно имеет право как минимум с некоторым недоверием относиться к сомнительным аргументам подобного рода. Но обратите внимание на то, что некоторые люди дают утвердительный ответ на этот вопрос, в том числе итальянский математик и священник Гвидо Гранди, именем которого обычно называют ряд 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + …. В работе, опубликованной в 1703 году, Гранди привел доводы в пользу того, что сумма данного ряда равна 1/2, а также заявил, что этот удивительный вывод символизирует сотворение Вселенной из ничего. (Не беспокойтесь, я тоже не понимаю последний пункт.) Другие выдающиеся математики того времени, такие как Лейбниц и Эйлер, были согласны со странными расчетами Гранди и даже с его интерпретацией{25}.

Но на самом деле решение загадки с числом 0,999… (а также парадокса Зенона и ряда Гранди) кроется несколько глубже. Вы совсем не должны поддаваться давлению моих алгебраических доводов. Например, вы можете настаивать на том, что 0,999… равно не 1, а скорее 1 минус некое крохотное бесконечно малое число. Если уж на то пошло, вы можете настаивать и на том, что число 0,333… не равно

в точности 1/3, а также отличается от этого числа на некую бесконечно малую величину. Для того чтобы довести данную мысль до конца, потребуется определенное упорство, но это можно сделать. Когда-то у меня был студент по имени Брайан, который изучал математический анализ. Не удовлетворившись теми определениями, которые давались на занятиях, Брайан сам разработал довольно большой фрагмент этой теории, назвав бесконечно малые величины

числами Брайана .

На самом деле Брайан не был первым, кто решил заняться этим. Существует целая область математики под названием «нестандартный анализ», которая специализируется на изучении чисел такого рода. Теория, сформулированая Абрахамом Робинсоном в середине XX столетия, наконец позволила понять смысл «бесконечно малых приращений», которые Беркли считал такими нелепыми. Цена, которую придется за это заплатить (или, если посмотреть на это с другой стороны, награда, которую вы за это получите), – обилие новых типов чисел, причем не только бесконечно малых, но и бесконечно больших – огромное множество чисел всех форм и размеров[46].

Так случилось, что Брайану повезло – у меня в Принстонском университете был коллега Эдвард Нельсон, крупный специалист в области нестандартного анализа. Я устроил им встречу, с тем чтобы Брайан мог больше узнать об этой области. Впоследствии Эд рассказывал мне, что та встреча прошла не очень хорошо. Как только Эд дал понять, что на самом деле бесконечно малые величины никто не будет называть

числами Брайана , Брайан полностью потерял интерес к этой области математики.

(

Мораль: люди, начинающие заниматься математикой ради славы и признания, задерживаются в науке ненадолго.)

Но мы так и не приблизились к разрешению нашего спора. Что представляет собой число 0,999…

на самом деле ? Это 1? Или это некое число, на бесконечно малую величину меньшее 1, – число, принадлежащее к совершенно необычному классу чисел, который даже не был открыт сотню лет назад?

Правильный ответ состоит в том, чтобы вообще не задавать такого вопроса. Что представляет собой число 0,999… на самом деле? По всей вероятности, некую сумму такого рода:

0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + …

Но что она значит? Настоящая проблема заключается в злополучном троеточии. Не может быть никаких споров по поводу того, что значит сумма двух, трех или сотни чисел. Перед нами всего лишь математическое обозначение физического процесса, который мы прекрасно понимаем: возьмите сотню куч чего угодно, смешайте их вместе и определите, сколько и чего у вас получилось. Но бесконечно большое количество? – это совсем другая история. В реальном мире вы не можете получить бесконечно большое количество множеств. Чему равно числовое значение бесконечной суммы? Его не существует –

пока мы не зададим это значение . В чем и состояла новаторская идея Огюстена Луи Коши, который в 1820-х годах ввел в математический анализ понятие

предела [47].

Лучше всего это объясняет Годфри Гарольд Харди в книге Divergent Series («Расходящиеся ряды»), опубликованной в 1949 году:

Это замечание сейчас тривиально: современному математику и не придет в голову, что какое-либо соединение математических символов может иметь «смысл» до того, как ему придан смысл с помощью определения. Но это не было тривиальностью даже для наиболее выдающихся математиков восемнадцатого века. Определения не были в их обычае; для них не было естественно говорить: «под

X мы понимаем

Y ». С некоторыми оговорками… верно будет сказать, что математики до Коши спрашивали не «как определить 1 - 1 + 1 - 1 + …?», а «что есть 1 - 1 + 1 - 1 + …?»; и этот склад мышления приводил их к ненужным затруднениям и спорам, зачастую носившим, по существу, чисто словесный характер[48].

И это не просто непринужденный математический релятивизм. Тот факт, что мы

можем придать какой угодно смысл той или иной последовательности математических символов, совсем не означает, что нам следует это делать. В математике, как и в жизни, есть как хороший, так и плохой выбор. В математическом контексте правильным считается выбор, позволяющий устранить ненужные затруднения, не создавая новых.

Чем больше членов ряда вы суммируете, тем ближе сумма 0,9 + 0,09 + 0,009 + … приближается к 1. И эта сумма никогда не превысит данное значение. Какое бы плотное оцепление мы ни устроили вокруг числа 1, в конце концов эта сумма после определенного конечного количества шагов пройдет сквозь него, но так и не выйдет наружу с другой стороны. По утверждению Коши, при таких обстоятельствах нам следует просто

установить значение бесконечной суммы равным 1. Затем он приложил немало усилий, чтобы доказать, что установление такого значения не приводит к появлению глубоких противоречий где бы то ни было. К моменту окончания своей работы Коши создал понятийный аппарат, сделавшим исчисление Ньютона абсолютно строгим. Когда мы говорим, что в локальном масштабе под определенным углом кривая напоминает прямую линию, то под этим подразумевается примерно следующее: по мере увеличения масштаба эта кривая все больше напоминает прямую линию. В формулировке Коши нет необходимости ссылаться на бесконечно малые числа или любое другое понятие, которое заставило бы скептика побледнеть.

Разумеется, этому есть своя цена. Трудность задачи с числом 0,999… объясняется тем, что она вступает в конфликт с нашим внутренним чутьем. С одной стороны, нам хотелось бы, чтобы сумму бесконечного ряда можно было получить посредством арифметических манипуляций, подобных тем, которые представлены на предыдущих страницах, а в этом случае такая сумма должна быть равной 1. С другой стороны, мы желали бы, чтобы каждое число было представлено в виде уникальной цепочки десятичных цифр, что противоречит утверждению: одно и то же число можно назвать либо 1, либо 0,999… – как нам больше нравится. Мы не можем удовлетворить оба этих желания одновременно – от какого-то из двух придется отказаться. Согласно подходу Коши, который в полной мере доказал свою состоятельность за два столетия, прошедшие с тех пор, как он сформулировал этот подход, отбросить следует именно уникальность разложения на десятичные дроби. Нас не смущает тот факт, что в английском языке две разные цепочки букв (то есть два слова) порой используются для синонимичного обозначения одной и той же вещи; точно так же нет ничего плохого и в том, что разные последовательности цифр могут обозначать одно и то же число.

Что касается ряда Гранди 1 - 1 + 1 - 1 + …, он принадлежит к числу рядов, находящихся за пределами теории Коши; другими словами, это один из расходящихся рядов, о которых идет речь в книге Харди. Норвежский математик Нильс Хенрик Абель, один из первых сторонников подхода Коши, написал в 1828 году следующее: «Расходящиеся ряды – это изобретение дьявола, и постыдно основывать на них какое бы то ни было доказательство»[49]. В наше время мы придерживаемся именно точки зрения Харди. Она более терпима: существуют расходящиеся ряды, которым мы должны приписать какое-то значение, а также ряды, в случае которых нам не следует этого делать, – все зависит от контекста, в котором возникает тот или иной ряд. Современные математики сказали бы, что если нам необходимо присвоить какое-то значение ряду Гранди, то это должно быть 1/2, поскольку, как оказалось, все интересные теории, описывающие бесконечные суммы, либо присваивают этому ряду значение 1/2, либо (подобно теории Коши) вообще отказываются приписывать какое бы то ни было значение сумме этого ряда[50].

Чтобы записать точные определения Коши, потребуется приложить немного больше усилий. В частности, это касалось и самого Коши, который не составил достаточно четкого описания своих идей в том виде, в котором они известны в настоящее время[51]. (В математике редко бывает так, что автор идеи дает самое четкое ее описание.)[52] Коши был убежденным консерватором и монархистом, но в области математики он оказался знающим себе цену мятежником и настоящим бедствием для академических властей. Как только Коши понял, как можно обойтись без опасных бесконечно малых величин, он по собственной инициативе переписал свой учебный план в Политехнической школе (?cole Polytechnique) таким образом, чтобы тот отображал его новые идеи. Все окружение Коши пришло от этого в ярость: обманутые студенты, записавшиеся на курс изучения основ математического анализа, а не на семинар по новейшим достижениям в области чистой математики; коллеги, считавшие, что студентам, изучающим в Политехнической школе инженерное дело, не нужен предложенный Коши уровень математической строгости; администраторы, распоряжения которых по поводу необходимости придерживаться официальной программы курса обучения Коши полностью игнорировал. Администрация Политехнической школы ввела новый учебный план по математическому анализу и посадила на занятиях Коши стенографистов, чтобы удостовериться, что он будет придерживаться этого плана. Но Коши не стал этого делать. Его мало волновали потребности инженеров. Его интересовала истина{26}.

С педагогической точки зрения, трудно защищать поведение Коши. Тем не менее я с пониманием отношусь к его позиции. Одна из величайших радостей математики – неоспоримое ощущение, что ты поймал правильную мысль и докопался до самого ее основания. Такого чувства я не испытывал ни на одном другом уровне своей психической деятельности. А когда вы знаете, как делать что-то правильно, трудно (а для некоторых упрямцев просто невозможно) заставить себя объяснить это неверным способом.

Глава третья

Поголовное ожирение

Комический актер Евгений Мирман часто рассказывает историю, имеющую прямое отношение к статистике. По его словам, он любит повторять на своих выступлениях одну фразу: «Я читал, что сто процентов американцев – азиаты». Какой-нибудь озадаченный зритель обязательно возразит: «Но Юджин,

вы же не азиат». В ответе артиста и содержится вся соль шутки: «Но я читал, что я азиат!»

Я вспомнил эту реплику Мирмана, когда натолкнулся в журнале Obesity на статью, в заголовке которой был поставлен весьма неприятный вопрос: «Будут ли все американцы страдать избыточным весом и ожирением?»{27} Как будто одной постановки вопроса было недостаточно, в статье дается ответ: «Да – к 2048 году».

Ровно в 2048 году мне стукнет семьдесят семь, и хотелось бы верить, что в столь почтенном возрасте я все-таки останусь при своем весе и не буду страдать ожирением. Но я читал, что буду!

Статья в журнале Obesity вызвала широкие дискуссии в прессе. В новостях предупреждали о наступлении «ожирения как катастрофы современности»{28}. В Long Beach Press-Telegram была опубликована статья с простым заголовком: We’re Getting Fatter («Мы становимся все более толстыми»){29}. Результаты исследования, проведенного автором этой статьи, перекликались с последним проявлением лихорадочной, постоянно меняющейся озабоченности американцев по поводу морального статуса нашей страны. Еще до моего рождения парни отращивали длинные волосы, а значит, мы были обречены на то, что коммунисты одержат над нами верх. Когда я был ребенком, мы слишком много играли в аркадные игры[53], что обрекало нас на проигрыш в конкурентной борьбе с трудолюбивыми японцами. Сейчас мы едим слишком много фастфуда, поэтому умрем слабыми и неспособными к самостоятельному передвижению, в окружении пустых пакетов от курятины, запихнутых под диваны, с которых мы уже давно не в состоянии подняться. В статье эта озабоченность была представлена в качестве научно доказанного факта.

Спешу вас обрадовать. Не все из нас в 2048 году будут страдать ожирением{30}. Почему? Потому что не все линии прямые.

Тем не менее, как мы узнали от Ньютона, каждая линия достаточно близка к прямой. Эта идея лежит в основе

линейной регрессии – статистического метода, имеющего для социологии то же значение, что и отвертка при ремонте дома. Это инструмент, которым вы почти наверняка воспользуетесь, какая бы задача перед вами ни стояла. Каждый раз, когда вы читаете в газете, что: люди, у которых много двоюродных братьев и сестер, чувствуют себя более счастливыми; граждане стран, где шире представлена сеть экспресс-кафе «Бургер Кинг», больше придерживаются свободной морали; сокращение приема ниацина повышает риск дерматофитоза в два раза; каждые 10 тысяч долларов дохода на 3 % повышают вероятность, что вы проголосуете за республиканцев, – во всех этих случаях вы имеете дело с результатом, полученным методом линейной регрессии[54].

Вот как это работает. Вы хотите установить взаимозависимость между двумя параметрами, скажем между стоимостью обучения в университете и средним баллом по отборочному тесту SAT принятых на учебу студентов. Возможно, вы считаете: чем выше средний балл SAT, тем дороже учебное заведение, – но посмотрите на данные, которые говорят, что это далеко не универсальный закон. В Университете Элона, расположенном на окраинах Берлингтона (штат Северная Каролина), средний совокупный результат по математике и английскому языку составляет 1217 баллов; при этом университет взимает плату за обучение в размере 20 441 доллара в год. Обучение в Колледже Гилфорда, расположенном рядом, в городе Гринсборо, обходится немного дороже – 23 420 долларов, но средний результат первокурсников по SAT составляет там всего 1131 балл.

Вместе с тем, если вы посмотрите на весь список учебных заведений Северной Каролины – тридцать один частный университет, данные об оплате за обучение и о среднем балле которых были представлены в 2007 году в «Сети ресурсов для построения карьеры штата Северная Каролина», – вы увидите четкую тенденцию{31}.

На представленном ниже рисунке каждая точка графика соответствует одному из колледжей. Вы видите те две точки, которые находятся в правом верхнем углу, с высоким средним баллом SAT и столь же высокой платой за обучение? Это Университет Уэйк Форест и Университет Дэвидсона. Одинокая точка в нижней части рисунка соответствует единственному частному учебному заведению в этом списке, плата за обучение в котором меньше 10 тысяч долларов, – Колледжу медицинских наук Кабаррус.

Данный рисунок четко показывает, что в учебных заведениях с более высоким средним баллом SAT цена за обучение, как правило, выше. Но

насколько выше? Именно здесь на сцену выходит линейная регрессия. Очевидно, что точки на рисунке не образуют прямую линию, но видно, что они находятся не так уж далеко от прямой. Пожалуй, можно было бы вручную нарисовать прямую линию, проходящую посередине этого облака точек. Линейная регрессия исключает угадывание и позволяет найти прямую линию, максимально приближенную ко всем точкам[55]. В случае университетов штата Северная Каролина эта прямая выглядит так, как на следующем рисунке.

Коэффициент наклона изображенной на рисунке прямой равен 28. Это означает следующее: если плата за обучение зависела бы только от баллов SAT, которые задает прямая на графике, тогда на каждый балл SAT приходилось бы дополнительных 28 долларов платы за обучение. Если вам удалось бы поднять средний балл первокурсников на 50 пунктов, тогда вы могли бы назначить более высокую плату за обучение – на 1400 долларов. (Или, с точки зрения родителей, если ваш ребенок на 100 баллов улучшит свой результат отборочного теста, это обойдется вам в дополнительных 2800 долларов в год. Курс по подготовке к тесту оказался более дорогим, чем вы думали!)

Линейная регрессия представляет собой замечательный инструмент: гибкий, масштабируемый и легкий в применении (вы просто нажимаете соответствующую кнопку электронной таблицы). Этот инструмент можно применять к двум наборам данных с участием двух переменных, как в приведенном выше примере, но он работает не менее эффективно и в случае трех или даже тысячи переменных. Каждый раз, когда вам нужно понять, как одни переменные меняют другие переменные и в каком направлении, линейная регрессия – это первое, что следует использовать. Этот инструмент применим буквально к любому набору данных.

Однако в этом заключается не только сильная, но и слабая сторона линейной регрессии. Вы можете применить этот метод, не задумываясь, действительно ли феномен, который вы пытаетесь моделировать, близок к линейному.

Но вы не должны так делать . Я сказал, что линейная регрессия подобна отвертке – что действительно так; однако в другом смысле она скорее напоминает циркулярную пилу. Если вы примените этот инструмент без тщательного анализа того, что вы делаете, результаты могут оказаться плачевными.

Возьмем в качестве примера ракету, которую мы с вами запустили в предыдущей главе. Возможно, вы не имеете никакого отношения к ее запуску. А может быть, напротив, представляете собой ту цель, на которую эта ракета направлена. В последнем случае вы особенно заинтересованы в как можно более точном анализе траектории движения ракеты.

Вы могли бы нанести на график положение ракеты по вертикали в пяти точках по времени. Такой график выглядит следующим образом.

Теперь вы в состоянии быстро выполнить линейную регрессию, получив замечательный результат: линию, которая проходит почти через все точки на графике.

(В этот момент ваша рука начинает приближаться к острому полотнищу циркулярной пилы.)

Построенная вами линия представляет собой весьма точную модель движения ракеты: за каждую минуту ракета поднимается вверх на определенное фиксированное расстояние, скажем на 400 метров. Через час ракета окажется в 24 километрах над поверхностью земли. Когда же она опустится на поверхность? Никогда! Направленная вверх наклонная прямая линия по-прежнему стремится вверх. Именно так ведут себя прямые.

(Кровь, травмы, вопли.)

Однако не каждая линия является прямой. А траектория полета ракеты

несомненно представляет собой не прямую, а параболу. Подобно окружности Архимеда, вблизи она действительно похожа на прямую, поэтому линейная регрессия сослужит вам большую службу, позволив определить местоположение ракеты через пять секунд после запуска. Но через час? Даже не думайте об этом. Ваша модель говорит о том, что через час ракета находится в нижних слоях стратосферы, хотя на самом деле она, возможно, уже приближается к вашему дому.

Возможно, самое образное предостережение в отношении бездумной линейной экстраполяции сформулировал не статистик, а Марк Твен в романе Life on the Mississippi («Жизнь на Миссисипи»):

…Длина Миссисипи между Каиром и Новым Орлеаном сто семьдесят шесть лет тому назад была тысяча двести пятнадцать миль. После прорыва русла в 1722 году длина стала тысяча сто восемьдесят миль. Когда образовался рукав у Американской излучины, длина стала тысяча сорок миль. С тех пор этот участок реки укоротился еще на шестьдесят семь миль. Следовательно, сейчас ее длина между Каиром и Новым Орлеаном всего девятьсот семьдесят три мили.

…За сто семьдесят шесть лет Нижняя Миссисипи укоротилась на двести сорок две мили, то есть в среднем примерно на милю и одну треть в год. Отсюда всякий спокойно рассуждающий человек, если только он не слепой и не совсем идиот, сможет усмотреть, что в древнюю силурийскую эпоху, – а ей в ноябре будущего года минет ровно миллион лет – Нижняя Миссисипи имела свыше миллиона трехсот тысяч миль в длину и висела над Мексиканским заливом наподобие удочки. Исходя из тех же данных, каждый легко поймет, что через семьсот сорок два года Нижняя Миссисипи будет иметь только одну и три четверти мили в длину, а улицы Каира и Нового Орлеана сольются, и будут эти два города жить да поживать, управляемые одним мэром и выбирая общий городской совет. Все-таки в науке есть что-то захватывающее. Вложишь какое-то пустяковое количество фактов, а берешь колоссальный дивиденд в виде умозаключений. Да еще с процентами[56].

Ремарка в сторону: Как получить зачетные баллы на моем экзамене по математическому анализу

Методы математического анализа во многом похожи на линейную регрессию: они носят сугубо механический характер, с ними вполне может справиться ваш калькулятор, а невнимательное применение этих методов сопряжено с большими опасностями. На экзамене по матану вам могут предложить рассчитать вес воды, оставшейся в кувшине после того, как вы проделаете в нем отверстие и позволите воде вытекать определенным потоком на протяжении определенного промежутка времени, и тому подобное. Решая задачу такого рода в условиях нехватки времени, вполне можно сделать арифметические ошибки. Порой это приводит к тому, что тот или иной студент получает нелепый результат, например что вес воды в кувшине составляет -4 грамма.

Если студент получает результат «-4 грамма» и в отчаянии торопливо пишет «Я где-то напортачил, но не могу найти ошибку», я даю такому студенту половину зачетных баллов за экзамен.

Если же студент просто пишет «-4 грамма» в конце страницы и обводит этот результат кружком, он получает ноль зачетных баллов – даже если вся процедура вывода этого результата была правильной, за исключением того, что где-то посередине страницы единственная цифра оказалась не на своем месте.

Вычисление интеграла или выполнение линейной регрессии – это задачи, которые достаточно эффективно может решать компьютер. Понимание того, имеет ли полученный результат смысл (или принятие решения, стоит ли вообще применять соответствующий метод в данном случае), требует направляющей человеческой руки. Когда мы преподаем математику, предполагается, что нужно объяснить учащимся, как стать таким проводником. Курс математики, который не делает этого, по существу учит студента выполнять функции дефектной версии Microsoft Excel.

Будем откровенны: именно это и происходит на большинстве наших математических курсов. Сокращенная история споров (сама представляющая собой предмет споров) состоит в том, что преподавание математики детям вот уже несколько десятилетий является ареной так называемых математических войн. По одну сторону этого противостояния находятся учителя, которые предпочитают делать акцент на запоминании, беглости, традиционных алгоритмах и точных ответах, а по другую сторону – учителя, считающие, что в основе преподавания математики должно лежать выяснение смысла, развитие способов мышления, обучение методом направляемых открытий и аппроксимация. Первый подход называют порой

традиционным , а второй –

реформистским , хотя предположительно нетрадиционный подход к обучению посредством открытий используется в той или иной форме вот уже десятки лет, а действительно ли так называемые реформы можно считать реформами – это и есть предмет споров. Споров весьма

ожесточенных . Во время званого математического ужина вполне прилично обсуждать политические или религиозные вопросы, но начните спорить о математической педагогике – и это грозит закончиться тем, что кто-то из сторонников либо традиционного, либо реформистского подхода обидится и хлопнет дверью.

Я не причисляю себя ни к одному из этих лагерей. Мне не по пути с теми реформистами, которые хотят отказаться от заучивания таблицы умножения наизусть. В процессе серьезных математических размышлений вам неизбежно понадобится умножить 6 на 8, но, если каждый раз для этого доставать калькулятор, вам не удастся достичь того состояния интеллектуальной спонтанности, которая требуется для процесса размышлений. Нельзя написать сонет, выискивая в словаре значение каждого слова.

Некоторые сторонники реформистского подхода заявляют, что классические алгоритмы (например, «сложить два двузначных числа, расположив одно над другим столбиком и в случае необходимости выполнив перенос») следует исключить из учебного курса, чтобы они не мешали ученикам самостоятельно обнаруживать свойства математических объектов[57].

С одной стороны, я считаю эту мысль ужасной: такие алгоритмы представляют собой полезные инструменты, над разработкой которых кто-то упорно работал, и нет никаких оснований начинать все с нуля.

С другой стороны, мне кажется, что в современном мире вполне можно отказаться от некоторых алгоритмов. Например, нам нет необходимости учить студентов извлекать квадратные корни вручную или в уме (хотя второй из этих двух навыков, говорю вам по собственному опыту, можно использовать в качестве замечательного фокуса на вечеринке в кругу яйцеголовых). Калькулятор – не менее полезный инструмент, над созданием которого кто-то упорно трудился; мы также должны использовать этот инструмент, когда того требует ситуация! Меня даже не интересует, могут ли мои студенты разделить 430 на 12 посредством деления столбиком. Меня

на самом деле волнует лишь одно: они должны мысленно определить, что ответ немногим больше 35 – тогда я буду спокоен, что у них прекрасно развиты арифметическое мышление и представление о числах.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, перейдя по ссылке http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=23304856&lfrom=329574480 и купив полную легальную версию на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.

Сноски

1

Russell Bertrand . The Study of Mathematics // Mysticism and Logic: And Other Essays. Longman, 1919. P. 60.

Прим. М. Г.

Здесь и далее все постраничные сноски даются в квадратных скобках. Примечания, написанные научным редактором, даны с пометой

М. Г. ; примечания, сделанные редактором, – с пометой

ред. ; авторские примечания – без какой-либо пометы.

2

В объяснении правил судоку в английской версии газеты Metro, в частности, сказано: «Хотя это игра с числами, она не требует математических навыков – только понимания логики и терпения».

Прим. М. Г.

3

Отец Пола [

Пол Вулфовиц – американский политик, президент Всемирного банка (2005–2007).

Прим. М. Г.].

4

Сэвидж был почти слепым и видел только уголком одного глаза. Как-то, чтобы доказать какую-то свою идею об освоении Арктики, он целых полгода питался одним пеммиканом [мясной концентрат; пища индейцев Северной Америки и основной мясной продукт в арктических и антарктических экспедициях начала XX века.

Прим. М. Г.]. Просто подумал, что об этом стоит упомянуть.

5

Отдельный интересный вопрос, как измерять качество питания в процентах.

Прим. М. Г.

6

Физик Ричард Фейнман утверждал, что математики

не ставят таких вопросов: «…Я всегда выигрывал. Если я угадывал – здорово. Если не угадывал, то всегда мог найти в их упрощении что-то, что они упускали из виду» (

Р. Ф. Фейнман. Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман! / Пер. с англ. Н. А. Зубченко, О. Л. Тиходеевой, М. Шифмана. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. С. 39).

Прим. М. Г.

7

Например, истории о том, что дельфины выталкивают тонущих людей на берег. На самом деле дельфины поддерживают тонущего на плаву, подталкивая в произвольных направлениях (что естественно для водных млекопитающих), но только выжившие – те, кого подтолкнули к берегу, – смогли рассказать о встрече с ними.

Прим. М. Г.

8

Взаимный фонд , или фонд взаимных инвестиций (mutual fund), – портфель акций, отобранных и приобретенных профессиональными финансистами на вложения большого числа мелких вкладчиков.

Прим. М. Г.

9

Справедливости ради следует отметить, что сам индекс S&P 500 показал еще более высокий рост – 212,5 % за тот же период.

10

Железный человек по имени Энтони Эдвард, или Тони Старк, – герой комиксов.

Прим. М. Г.

11

Парафраз известной формулировки Карла фон Клаузевица: «Война есть не что иное, как продолжение государственной политики иными средствами» (

К. Клаузевиц . О войне / Пер. А. Рачинского. М.: Логос; Наука, б.г. [1998]. С. 27).

Прим. ред.

12

Владимир Игоревич Арнольд приводил следующие слова Годфри Харди (в двух вариантах – и оба раза с негодованием): 1) «Общая черта королевы и математики – полная бесполезность обеих» (

В. Арнольд . Переориентация науки на «прикладные исследования» приведет к снижению интеллектуального уровня страны // Троицкий вариант – Наука. 2008. № 19. http://trv-science.ru/2008/12/23/18/); 2) «Теория чисел является королевой математики вследствие своей полной бесполезности» (

В. Арнольд . Нужна ли в школе математика? Доклад на Всероссийской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» в Дубне 21 сентября 2000 года // Скепсис. http://scepsis.net/library/id_649.html). Харди написал это в начале прошлого века. Сейчас всякий раз, когда вы пользуетесь кредитной карточкой, вы (точнее, банк) используете алгоритмы шифрования транзакций, основанные на результатах теории чисел.

Прим. М. Г.

13

См.:

J. von Neumann . Collected Works. Volume I: Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics. New York; London; Oxford; Paris: Pergamon Press, 1961. Pp. 1–9. [Приведенная далее цитата дается в пер. Ю. А. Данилова, см.:

Ю. А. Данилов . Математик фон Нейман и его «Математик» // Природа. 1983. № 2. С. 86–87.

Прим. перев.]

14

В настоящее время специалисты называют теорему Ферма теоремой Уайлса, поскольку Эндрю Уайлс доказал ее (не без помощи Ричарда Тейлора), тогда как Ферма не сделал этого. Однако, по всей вероятности, традиционное название неискоренимо и вряд ли будет когда-нибудь вытеснено.

15

Ее доказал Григорий Перельман.

Прим. М. Г.

16

Это гипотеза.

Прим. М. Г.

17

Правда, в двадцать с лишним лет я все-таки потратил какое-то время на нешуточные размышления, не стать ли мне настоящим писателем. Я даже написал и опубликовал вполне глубокомысленное литературное произведение – роман The Grasshopper King («Король кузнечиков»). Но пока я работал над ним, то обнаружил, что по полдня слоняюсь в тоске, мечтая лишь об одном: решать математические задачи.

18

Ю. А. Данилов. Математик фон Нейман и его «Математик». С. 86.

Прим. М. Г.

19

Под «шведскостью» подразумевается вовсе не такая характерная особенность страны, как «всегда имеющаяся в наличии селедка под десятками разнообразных маринадов», а «уровень социального обеспечения и налогообложения» – состояние, к которому несомненно должны стремиться все без исключения государства.

20

Точнее, для этих и ряда последующих рассуждений автора существенна разница между монотонностью и немонотонностью.

Прим. М. Г.

21

Или, если хотите, не линия, а линейный сегмент. Но я не собираюсь из этих терминологических расхождений раздувать целую проблему.

22

Гораций . Сатиры, II, 1, 106–107 / Пер. М. Дмитриева // Квинт Гораций Флакк. Оды, эподы, сатиры, послания. М.: Художественная литература, 1970. С. 248.

Прим. ред.

23

Аристотель . Никомахова этика, кн. II, гл. 2, стр. 1104a / Пер. Н. Брагинской // Аристотель. Сочинения в четырех томах. М.: Мысль, 1983. Т. 4. С. 80.

Прим. ред.

24

Фильм Джона Хьюза (1984), в котором роль преподавателя экономики сыграл известный экономический комментатор Бен Стайн.

Прим. М. Г.

25

Эту часть истории Лаффер отрицает. По его словам, в ресторане были превосходные тканевые салфетки, которые он ни за что не стал бы портить экономическими закорючками.

26

Из книги «Физики шутят»: «Дирак любил потеоретизировать на самые различные темы. Однажды он высказал предположение, что существует оптимальное расстояние, на котором женское лицо выглядит привлекательнее всего; поскольку в двух предельных случаях – на нулевом и бесконечном расстоянии – “привлекательность обращается в нуль” (ничего не видно), то между этими пределами, естественно, должен существовать максимум» (Физики шутят / Составители-переводчики: Ю. Конобеев, В. Павлинчук, Н. Работнов, В. Турчин. М.: Мир, 1993).

Прим. М. Г.

27

Примерно от 500 тысяч до 1 миллиона долларов в год в современном исчислении.

28

Похоже, я единственный, кто о ней вспомнил.

29

Американский политик Джек Френч Кемп в 1988 году проиграл на республиканских праймериз Бушу-ст., в 1996 году был кандидатом в вице-президенты (с Бобом Доулом).

Прим. М. Г.

30

Трудно сказать наверняка, действительно ли увеличение объема налоговых поступлений было обусловлено тем, что богатые люди, освободившись от бремени подоходного налога, начали работать больше, как гласит теория предложения.

31

Или, что еще более вероятно, это вообще может быть не одна кривая, как показал Мартин Гарднер с помощью запутанной «неокривой Лаффера» в язвительной оценке теории предложения, изложенной в статье «Кривая Лаффера».

32

Ср. формализацию женской логики по Колмогорову: «

Пусть [P=>Q]

и [Q приятно]

; тогда P»; см.:

В. А. Успенский . Лермонтов, Колмогоров, женская логика и политкорректность // Неприкосновенный запас. 2000. № 6 (14).

Прим. М. Г.

33

SAT (Scholastic Assessment Test, букв. «академический оценочный тест») – отборочный экзамен для выпускников школ на определение академических способностей.

Прим. М. Г.

34

Кстати, нам неизвестно, кто первым доказал теорему Пифагора, хотя ученые почти убеждены, что это был не Пифагор. На самом деле, помимо засвидетельствованного современниками факта существования некоего ученого мужа с именем «Пифагор», жившего и обретшего славу в VI веке до нашей эры, мы ничего о нем не знаем. Основные сведения о жизни и работе Пифагора появились лишь через 800 лет после его смерти. К тому времени реального человека Пифагора полностью затмил миф о Пифагоре, вобравший в себя философские учения мыслителей, называвших себя пифагорейцами.

35

Российским ученым известно со школы, что пифагоровы штаны во все стороны равны.

Прим. М. Г.

36

На самом деле нельзя, но до XVIII века никто не смог это доказать.

37

В действительности силосные башни не были круглыми до начала XX века, когда профессор Висконсинского университета Хорас У. Кинг не придумал – чтобы решить проблему порчи продукции, лежащей в углах башни, – цилиндрическую конструкцию, широко распространенную в наше время.

38

Точнее говоря, каждый из этих четырех фрагментов можно получить из исходного равнобедренного прямоугольного треугольника, вращая его по кругу на плоскости. Давайте примем без доказательств тот факт, что такие манипуляции не меняют площадь фигуры.

39

Во всяком случае, если вы, как и я, живете на Среднем Западе США.

40

Математический объект, который в каждой точке локально выглядит как обычное евклидово пространство, называется

многообразием . Пример одномерного многообразия – окружность или любая другая кривая без углов и концов, например парабола. Примеры двумерных многообразий:

сфера – поверхность шара;

тор – поверхность баранки;

крендель – поверхность кренделя;

бутылка Клейна – в нашем обычном трехмерном пространстве невозможно представить эту поверхность, бутылка Клейна получается, если вытянуть горлышко обычной бутылки и соединить ее с донышком, предварительно проделав в нем дырку нужного размера и потом сгладив место соединения; фокус состоит в том, что вставить надо с

внутренней стороны , иначе получится обычный тор, и при этом

без пересечения стенки бутылки . Некоторые свойства многообразий описывает, в частности, уже упоминавшаяся гипотеза Пуанкаре.

Прим. М. Г.

41

Дж. Беркли . Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику… // Беркли Дж. Сочинения / Сост., общ. ред. и вступит. ст. И. С. Нарского; пер. А. Ф. Грязнова, Е. Ф. Дебольской, Е. С. Лагутина, Г. Г. Майорова, А. О. Маковельского. М.: Мысль, 1978. С. 425–426.

Прим. М. Г.

42

При отсутствии воздействия силы тяжести, сопротивления воздуха и т. д. и т. п. Однако на коротком интервале времени такое линейное приближение является достаточно точным.

43

Самое время обратиться к Пушкину:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.

Другой смолчал и стал пред ним ходить.

Сильнее бы не мог он возразить;

Хвалили все ответ замысловатый.

Но, господа, забавный случай сей

Другой пример на память мне приводит:

Ведь каждый день пред нами Солнце ходит,

Однако ж прав упрямый Галилей.

Прим. М. Г.

44

По правде сказать, речь идет о подростках из летнего математического лагеря.

45

Есть объект, 2-адические числа, для которых этот довод, на первый взгляд бредовый, абсолютно корректен.

Согласно теории Коши, сходимость ряда к пределу

x означает, что когда вы суммируете все больше и больше членов этого ряда, итоговая сумма все больше приближается к значению

x . Чтобы понять это, мы должны представлять, что значит «близость» двух чисел друг к другу. Оказывается, знакомое нам значение слова «близость» не единственное! В мире 2-адических чисел два числа считаются близкими друг к другу, если разность между ними представляет собой величину, кратную большой степени числа 2. Когда мы говорим, что ряд 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + … сходится к значению -1, мы тем самым утверждаем, что частичные суммы 1, 3, 7, 15, 31… все больше приближаются к -1. В обычном понимании «близости» это не так, однако при использовании понятия 2-адической близости ситуация обстоит совсем иначе. Разность между числами 31 и -1 равна 32, что составляет достаточно малое 2-адическое число 25. Просуммируйте еще несколько членов этого ряда – и получите число 511, которое отличается от -1 на 512, еще меньшую величину (в 2-адическом смысле). Б

о льшая часть математики, которую вы знаете (анализ, логарифмы и экспоненциальные функции, геометрия), имеет аналог в мире 2-адических чисел (а также аналог в мире

p -адических чисел для любого

p). Взаимодействие между всеми этими концепциями близости являет собой отдельную историю – умопомрачительную и недосягаемо прекрасную.

46

Сюрреальные числа , которые описал Джон Конвей, – это особенно очаровательный и причудливый пример, о чем говорит само название. Этот класс чисел, глубинные аспекты которого еще не изучены, представляет собой удивительный гибрид чисел и стратегических игр. Полезную информацию об этих экзотических числах, а также многих математических методах ведения игр можно найти в труде Элвина Берлекэмпа, Джона Хортона Конвея и Ричарда Гая Winning Ways… («Выигрышные стратегии в математических играх»), см.:

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy . Winning Ways for Your Mathematical Plays. Natik MA: A K Peters/CRC Press. 2 ed. Vol. 1–4. 2001–2004.

47

Подобно всем математическим прорывам, теория пределов Коши имела предшественников; в частности, определение Коши было во многом созвучно с концепцией границ величины погрешности биномиального ряда Д’Аламбера. Однако нет никаких сомнений, что работа Коши представляла собой переломный момент: после него анализ стал таким, каким мы его знаем сейчас.

48

Г. Г. Харди . Расходящиеся ряды / Пер. с англ. Д. А. Райкова. М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. С. 19.

Прим. ред.

49

Есть какая-то ирония в том, что первоначально Гранди нашел своим расходящимся рядам теологическое применение!

50

Здесь уместно вспомнить известную фразу Кейди, героини Линдси Лохан: «Предела не существует!» [из фильма Mean Girls, 2004 («Дрянные девчонки»).

Прим. М. Г.].

51

Если вы когда-либо изучали математический курс, в котором используются такие символы, как эпсилон и дельта, значит, вы знакомы с преемниками формальных определений Коши.

52

См. у Литтлвуда: «(А. С. Безикович) Репутация математика основывается на числе плохих доказательств, которые он придумал». И далее следует пояснение автора: «Работы первооткрывателей неуклюжи» (

Дж. Литлвуд . Математическая смесь. М.: Наука, 1990. С. 42).

Прим. М. Г.

53

Аркадные игры (arcade games) – компьютерные игры с нарочно примитивным игровым процессом.

Прим. ред.

54

Более подробную информацию об этих исследованиях можно найти в статье, опубликованной в Journal of Stuff I Totally Made Up in Order to Illustrate My Point («Журнал, придуманный мною для освещения собственной точки зрения»).

55

В данном контексте «максимальная приближенность» определяется следующим образом. Если вы замените фактическую плату за обучение в каждом университете оценкой, которую подразумевает прямая, а затем вычислите разность между расчетной и фактической платой за обучение, после чего возведете каждое из этих чисел в квадрат и сложите все эти квадраты, то получите общий показатель того, насколько прямая не проходит по точкам. Надо выбрать прямую, у которой этот показатель минимален. Такое суммирование квадратов напоминает о Пифагоре; в действительности геометрия, лежащая в основе линейной регрессии, – не что иное, как теорема Пифагора, преобразованная и доработанная для решения задач с гораздо большей размерностью. Однако эта история требует больше алгебраических выкладок, чем я хотел бы здесь приводить. Более подробное описание соответствующих аспектов корреляции и тригонометрии можно найти в главе 15.

56

Марк Твен . Жизнь на Миссисипи / Пер. Р. Райт-Ковалевой // Марк Твен. Собрание сочинений в 12 томах. М.: Художественная литература, 1960. Т. 4. С. 351–352.

Прим. ред.

57

Эти требования вызывают в памяти сюжет рассказа Орсона Скотта Карда Unaccompanied Sonata («Соната без сопровождения»). В нем идет речь о сверходаренном музыканте, которого держат в одиночестве, в строгой изоляции от всей существующей в мире музыки, с тем чтобы это не лишило оригинальности его собственную музыку. Но затем один человек пробирается к нему и дает запись с музыкой Баха. Разумеется, блюстители порядка узнают об этом и навсегда запрещают необыкновенному музыканту заниматься музыкой. Кажется, в дальнейшем ему отрежут пальцы, или лишат зрения, или сделают что-то еще, поскольку Орсон Скотт Кард имеет странную склонность к жестокому наказанию своих персонажей и расчленению их живой плоти. Как бы там ни было, смысл всей этой истории сводится к следующему: Бах слишком велик, чтобы пытаться удерживать молодых музыкантов от приобщения к его музыке. [См.:

О. С. Кард . Соната без сопровождения / Пер. В. Постникова // О. С. Кард. Карты в зеркале. М.; СПб.: ЭКСМО; Домино, 2005. С. 417–439.

Прим. ред.]

Комментарии

1

Биографические материалы об Абрахаме Вальде взяты из работы:

Oscar Morgenstern . Abraham Wald, 1902–1950 // Econometrica, 1951, Oct., 19, no 4, p. 361–367.

2

Исторические данные о SRG взяты главным образом из следующего источника:

W. Allen Wallis . The Statistical Research Group, 1942–1945 // Journal of the American Statistical Association, 1980, June, 75, no 370, p. 320–330.

3

W. Allen Wallis . The Statistical Research Group…, p. 322.

4

W. Allen Wallis . The Statistical Research Group…, p. 322.

5

W. Allen Wallis . The Statistical Research Group…, p. 329.

6

Я узнал о Вальде и проблеме крепкой авиационной брони из книги Говарда Вейнера:

Howard Wainer . Uneducated Guesses: Using Evidence to Uncover Misguided Education Policies. NJ: Princeton University Press, 2011. Автор использует идеи Вальда для анализа таких же сложных и неполных статистических данных, полученных в ходе изучения сферы образования.

7

См.:

Marc Mangel, Francisco J. Samaniego . Abraham Wald’s Work on Aircraft Survivability // Journal of the American Statistical Association, 1984, June, 79, no. 386, p. 259–267.

8

См.:

Jacob Wolfowitz . Abraham Wald, 1902–1950 // Annals of Mathematical Statistics, 1952, Mar. 23, no. 1, p. 1–13.

9

Amy L. Barrett, Brent R. Brodeski . Survivor Bias and Improper Measurement: How the Mutual Fund Industry Inflates Actively Managed Fund Performance (http://www.etf.com/docs/sbiasstudy.pdf).

10

Martin Rohleder, Hendrik Scholz, Marco Wilkens . Survivorship Bias and Mutual Fund Performance: Relevance, Significance, and Methodical Differences // Review of Finance, 2011, vol. 15, no 2, p. 441–474 – см. таблицы. Мы перевели месячную избыточную доходность в годовую избыточную доходность, поэтому цифры в нашем тексте не совпадают с данными, приведенными в статье.

11

Abraham Wald . Method of Estimating Plane Vulnerability Based on Damage of Survivors. Alexandria, VA: Center for Naval Analyses, repr., 1980, July, CRC 432.

12

Что касается гипотезы Римана, мне больше всего нравятся книги:

John Derbyshire . Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics. New York: Plume; Reprint edition, 2004 [

Дж. Дербишир . Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике. М.: Астрель; Corpus, 2010. –

Прим. М. Г.];

Marcus du Sautoy . The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics. New York: Harper Perennial; Reprint edition, 2012. О теореме Гёделя см.:

Douglas Hofstadter . G?del, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. New York: Basic Books, 1999 [

Д. Хофштадтер . Гёдель, Эшер, Бах. Эта бесконечная гирлянда. Самара: Бахрах-М, 2001. –

Прим. М. Г.]. По правде сказать, теорема Гёделя упоминается в этой книге вскользь, как один из элементов размышлений о самоотносимости в искусстве, музыке и логике.

13

Daniel J. Mitchell . Why Is Obama Trying to Make America More Like Sweden when Swedes Are Trying to Be Less Like Sweden? // Cato Institute, 2010, March 16 (www.cato.org/blog/why-obama-trying-make-america-more-sweden-when-swedes-are-trying-beless-sweden – просмотрено 13.01.2014).

14

Horace . Satires 1.1.106 / Trans. Basil Dufallo // Satis/Satura: Reconsidering the «Programmatic Intent» of Horace's Satires 1.1. Classical World, 2000, vol. 93, no 6, p. 579–590.

15

Лаффер всегда настаивал, что не он придумал кривую своего имени; когда-то эту идею понял и описал Джон Кейнс, а базовый принцип сформулировал еще в XIV веке историк Ибн Хальдун.

16

Цит. по:

JonathanChait . Prophet Motive: Jude Wanniski, the GOP's odd man in // New Republic, 1997, March 31.

17

Hal R. Varian . What Use Is Economic Theory? [Working Paper] University of California at Berkeley, 1989, August (http://people.ischool.berkeley.edu/~hal/Papers/theory.pdf – просмотрено 13.01.2014).

18

David Stockman . The Triumph of Politics: How the Reagan Revolution Failed. New York: Harper & Row, 1986, p. 10.

19

N. Gregory Mankiw . Principles of Microeconomics. Amsterdam: Elsevier, 1998, vol. 1, p. 166.

20

Martin Gardner . The Laffer Curve //

Martin Gardner . The Night Is Large: Collected Essays, 1938–1995. New York: St. Martin’s Griffin, 1996, p. 127–139.

21

Во время рассмотрения в 1978 году законопроекта Кемпа – Рота, направленного на снижение налоговых ставок.

22

См.:

Christoph Riedweg . Pythagoras: His Life, Teaching, and Influence. Ithaca; New York: Cornell University Press, 2005, p. 2.

23

George Berkeley . The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician (1734) / Ed. David R. Wilkins, (www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.pdf – просмотрено 13.01.2014).

24

См.:

David O. Tall, Rolph L. E. Schwarzenberger . Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits // Mathematics Teaching, 1978, 82, p. 44–49.

25

Информация о Гранди и его ряде взята в основном из работы:

Morris Kline . Euler and Infinite Series // Mathematics Magazine, 1983, Nov., vol. 56, no. 5, p. 307–314.

26

История о занятиях по исчислению, которые вел Коши, взята из книги:

Amir Alexander . Duel at Dawn: Heroes, Martyrs, and the Rise of Modern Mathematics. Harvard University Press, 2010. Амир Александер проводит чрезвычайно интересное историческое исследование взаимодействия между математикой и культурой в начале XIX века. Несколько иная точка зрения на современность подхода Коши представлена в другой публикации:

Michael J. Barany . Stuck in the Middle: Cauchy’s Intermediate Value Theorem and the History of Analytic Rigor // Notices of the American Mathematical Society, 2013, Nov., 60, no. 10, p. 1334–1338.

27

См. исследование, проведенное группой специалистов, возглавляемой Юфом Ванга:

Youfa Wang et al. Will All Americans Become Overweight or Obese? Estimating the Progression and Cost of the US Obesity Epidemic // Obesity, 2008, Oct. 16, no. 10, p. 2323–2330.

28

abcnews.go.com/Health/Fitness/story?id=5499878&page=1.

29

Long Beach Press-Telegram, 2008, Aug. 17.

30

Мои комментарии по поводу исследования Ванга в значительной мере совпадают с точкой зрения Карла Бялика, изложенной им в статье «Исследование ожирения выглядит жидковато», см.:

Carl Bialik . Obesity Study Looks Thin // Wall Street Journal, 2008, Aug. 15. О статье я узнал уже после написания этой главы.

31

Эти цифры взяты с сайта North Carolina Career Resource Network (www.soicc.state.nc.us/soicc/planning/c2c.htm), который позже был закрыт.